Institut für Algebraische Geometrie
Prof. Dr. M. Schütt
Dr. N. Broomhead
Abgabe: 04.1.2011

Algebraische Geometrie
9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Einfache Topologie und Anwendungen in Algebr. Geometrie)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:*

1. *Ist X irreduzibel, so schneiden sich nichtleere offene Teilmengen nichtleer. Insbesondere sind nichtleere offene Teilmengen dicht in X. (Anwendung: oft benutzt für Zariski-Topologie)*
2. *$U \subset X$ ist genau dann irreduzible, wenn der Abschluss $\bar{U} \subset X$ irreduzibel ist. (Anwendung: $U \subset \mathbb{A}^n$ irred $\iff \bar{U} \subset \mathbb{P}^n$ irred)*
3. *Sei $f : X \to Y$ stetig und abgeschlossen. Dann ist $f(X)$ irreduzibel. (Anwendung: Morphismen projektiver Varietäten)*

Aufgabe 2. *Es sei $\bar{C}_{2n}$ die Kompaktifizierung der komplexen Kurve*

$$C_{2n} = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2;\ y^2 = (x-1)(x-2)\dots(x-2n)\}.$$

(Die Kompaktifizierung wurde in einer Übung als (Prä-)Varietät konstruiert, siehe Bsp. 2.4.6 im Skript.) Was ist die Dimension von $\bar{C}_{2n}$?

Aufgabe 3 (Quadriken in $\mathbb{P}^2$)**.** *Eine Quadrik in $\mathbb{P}^2$ ist durch ein homogenes Polynom vom Grad 2 gegeben. Zeigen Sie:*

1. *Durch 5 beliebige Punkte in $\mathbb{P}^2$ geht eine Quadrik Q.*
2. *Die Quadrik Q ist eindeutig, falls keine 4 Punkte auf einer Geraden liegen. (Was sonst?)*
3. *Die Quadrik ist genau dann irreduzibel, wenn keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.*

Tip: Argumentieren Sie auf dem Parameterraum $\mathbb{P}^5$ der Quadriken, übersetzen Sie die Bedingung, dass ein gegebener Punkt auf einer Quadrik liegt, und nutzen Sie Dimensionsargumente aus der Vorlesung.