Mathematik für Ingenieure I

Wintersemester 2013/14

W. Ebeling

©Wolfgang Ebeling
Institut für Algebraische Geometrie
Leibniz Universität Hannover
Postfach 6009
30060 Hannover
E-mail: ebeling@math.uni-hannover.de

Literatur

Es gibt sehr viele Bücher zur Mathematik für Ingenieure. Hier eine Auswahl:

[1] G. Merziger, Th. Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik. Binomi Verlag, Springe. ISBN 3-923 923-33-3

[2] G. Merziger et al.: Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik. Binomi Verlag, Springe. ISBN 3-923 923-35-X

[3] K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik 1. 6., korr.Aufl. 2001. Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-41850-4.

[4] L. Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Vieweg Verlag,
Band 1 ISBN 3-528-94236-3,
Band 2 ISBN 3-528-94237-1,
Anwendungsbeispiele ISBN 3-528-44355-3,
Klausur- und Übungsaufgaben ISBN 3-528-03208-1.

[5] L. Papula: Mathematische Formelsammlung. Vieweg Verlag ISBN 3-528-74442-1

Kapitel 1

Lineare Algebra I

1.1 Zahlen

Zum Abzählen bedient man sich der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

bezeichnet die *Menge der natürlichen Zahlen*. (Man beachte, dass wir die Null mit hinzunehmen!) Von L. KRONECKER (1823-1891) stammt der Ausspruch: Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Mit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

bezeichnet man die *Menge der ganzen Zahlen*.

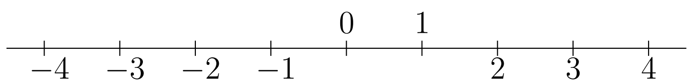
Aus den ganzen Zahlen lassen sich die rationalen Zahlen konstruieren:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

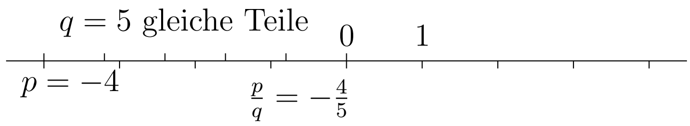
ist die *Menge der rationalen Zahlen*.

Schließlich hat man noch die *Menge der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$, deren Elemente in "eineindeutiger" Weise den Punkten einer Geraden entsprechen.

Wie erhält man nun die eineindeutige Korrespondenz zwischen den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und einer Geraden? Dazu wählen wir zunächst zwei Punkte 0 und 1 auf der Geraden und tragen dann äquidistant die übrigen ganzen Zahlen ab.

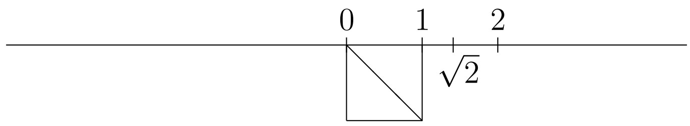


Um nun einen Punkt für die rationale Zahl $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, festzulegen, teilt man die Strecke $\overline{0p}$ auf der Geraden in q gleiche Teile. Der am dichtesten bei 0 gelegene Teilpunkt steht dann für $\frac{p}{q}$.



Man sieht dann ein, dass die rationalen Zahlen "dicht" auf der Geraden liegen. Das heißt, in jeder noch so kleinen Umgebung eines jeden Punktes der Geraden findet man eine rationale Zahl (genauer gesagt, einen Punkt, der eine rationale Zahl repräsentiert). Um einen solchen Punkt zu finden, muss man q genügend groß und p passend wählen.

Allerdings hat man bisher keineswegs alle Punkte der Geraden erwischt. Die Diagonale des Einheitsquadrats hat die Länge $\sqrt{2}$.



Satz 1.1.1 *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational (d.h. nicht rational).*

Beweis. Dieser Beweis ist ein Beispiel für einen *indirekten Beweis*. Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ rational ist, und leiten daraus einen Widerspruch her. Wir nehmen also an

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0.$$

Ohne Einschränkung können wir zusätzlich annehmen, dass dieser Bruch bereits gekürzt ist. Insbesondere können wir annehmen, dass p und q nicht beide gerade sind.

Aus $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ folgt aber

$$2q^2 = p^2.$$

Daraus folgt p^2 gerade. Da aber Quadrate ungerader Zahlen wieder ungerade sind, muss also schon p gerade sein, d.h. $p = 2p'$ für ein $p' \in \mathbb{Z}$. Setzen wir dies für p in die obige Gleichung ein, so folgt

$$2q^2 = 4(p')^2.$$

Teilen wir beide Seiten der Gleichung durch 2, so erhalten wir

$$q^2 = 2(p')^2.$$

Daraus folgt nun aber, dass auch q^2 und damit q gerade sein muss. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme. Also war unsere Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, falsch.
$\square$

Zwischen den bisher genannten Mengen hat man die folgenden Teilmengenbeziehungen:
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

1.2 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Wir stellen uns die reellen Zahlen als *Zahlengerade* vor. Jedem Punkt der Geraden entspricht eine reelle Zahl. Jedem Punkt der Ebene entspricht ein Paar (x, y), jedem Punkt des Raumes ein Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen. Allgemein nennt man

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ wobei } x_1, \ldots, x_n \text{ reelle Zahlen sind,}$$

ein n-*Tupel* (n ist hierbei eine beliebige natürliche Zahl). Wir setzen

$$\mathbb{R}^n := \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Man beachte, dass bei einem n-Tupel die Reihenfolge wichtig ist, d.h. zwei Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ sind genau dann gleich, wenn $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. Man nennt den $\mathbb{R}^n$ auch den *reellen Standardvektorraum der Dimension* n und ein Element dieses Raumes auch einen *Vektor*. Die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heissen die *Komponenten* von $\vec{x}$.

Der $\mathbb{R}^1$ ist die Zahlengerade, $\mathbb{R}^2$ entspricht der Ebene, $\mathbb{R}^3$ dem Raum. Für größere n hat man keine geometrische Vorstellung mehr.

Mit den reellen Zahlen kann man rechnen, man kann sie nach den üblichen Regeln addieren und multiplizieren. Auch mit n-Tupeln kann man rechnen. Für $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir eine *Addition*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

und für $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine *Multiplikation mit einer Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Wir setzen ausserdem:

$$\begin{aligned} \vec{0} &:= (0, \ldots, 0) \\ -\vec{x} &:= (-x_1, \ldots, -x_n). \end{aligned}$$

Statt $\vec{x} + (-\vec{y})$ schreibt man kürzer $\vec{x} - \vec{y}$.

Man kann diese Operationen geometrisch deuten: Dazu sehen wir ein n-Tupel $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ als Vektor an, d.h. als einen Pfeil mit Fußpunkt in

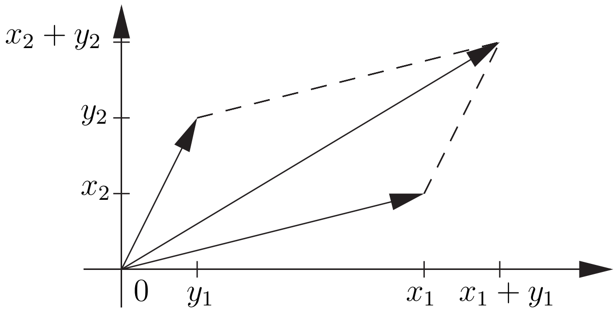


Abbildung 1.1: Addition zweier Vektoren ($n = 2$)

$\vec{0} := (0, \ldots, 0)$ und Spitze in $\vec{x}$. Zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ spannen dann ein Parallelogramm auf (siehe Abbildung 1.1 für $n = 2$) und dem Vektor $\vec{x} + \vec{y}$ entspricht dann der Pfeil, der auf der Diagonale mit dem Fußpunkt $\vec{0}$ liegt und als Spitze den anderen Eckpunkt hat. Der Multiplikation mit der Zahl λ entspricht die Streckung des Vektors $\vec{x}$ um den Faktor λ.

Satz 1.2.1 (Vektorraumaxiome) *Es seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(V1) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.

(V2) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

(V3) $\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$.

(V4) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

(V5) $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$.

(V6) $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$.

(V7) $(ab)\vec{x} = a(b\vec{x})$.

(V8) $1\vec{x} = \vec{x}$.

1.3 Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Wir wollen nun auch Längen und Winkel definieren. Deswegen führen wir das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ein.

Definition Für Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ des $\mathbb{R}^n$ ist das *Skalarprodukt* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ definiert als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Man beachte, dass $\vec{x} \cdot \vec{y}$ eine reelle Zahl ist. Bei der Multiplikation eines Vektors $\vec{x}$ mit einem Skalar λ erhält man dagegen einen Vektor $\lambda\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Satz 1.3.1 (Eigenschaften des Skalarprodukts) (a) *Für alle* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$$

und es gilt $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ *genau dann, wenn* $\vec{x} = \vec{0}$. *(Das Skalarprodukt ist* positiv definit.*)*

(b) *Für alle* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}.$$

(Das Skalarprodukt ist symmetrisch.*)*

(c) *Für alle* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{z}) \cdot \vec{y} &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{z} \cdot \vec{y}, \\ (\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} &= \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}), \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}, \\ \vec{x} \cdot (\lambda\vec{y}) &= \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}). \end{aligned}$$

(Das Skalarprodukt ist bilinear.*)*

Beweis. (a) Für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

Daran sieht man auch, dass $\vec{x} \cdot \vec{x}$ genau dann gleich 0 ist, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 0$, also $\vec{x} = \vec{0}$ gilt.

Die Formeln von (b) und (c) rechnet man einfach nach. □

Definition Die *Länge* oder *Norm* eines Vektors $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ist definiert durch

$$|\vec{x}| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Nach Satz 1.3.1 (a) folgt

$$|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Satz 1.3.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|.$$

Für $\vec{y} \neq \vec{0}$ gilt $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}|$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{x} = \lambda \vec{y}$.

Die Norm hat die folgenden Eigenschaften.

Satz 1.3.3 (Eigenschaften der Norm) (a) *Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\vec{x}| \geq 0 \text{ und } |\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

(b) *Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|\lambda \vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|.$$

(c) *(*Dreiecksungleichung*) Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

Beweis. (a) folgt aus Satz 1.3.1 (a).
(b) folgt aus Satz 1.3.1 (c).
Zu (c): Es gilt

$$\begin{aligned} |\vec{x} + \vec{y}|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{x}) + 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) \\ &\leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 \quad \text{nach Satz 1.3.2} \\ &= (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2. \end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel, so erhält man

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

□

Mit Hilfe der Norm kann man zwischen zwei Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ einen Abstand erklären:

Definition Der *Abstand* zwischen zwei Punkten $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ist definiert durch

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := |\vec{y} - \vec{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Aus den Eigenschaften der Norm folgt:

Satz 1.3.4 (Eigenschaften des Abstands) (a) *Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \text{ und } d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

(b) *Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}).$$

(c) *(*Dreiecksungleichung*) Für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$d(\vec{u}, \vec{w}) \leq d(\vec{u}, \vec{v}) + d(\vec{v}, \vec{w}).$$

Beweis. (a) und (b) folgen direkt aus Satz 1.3.3 (a).
(c) folgt aus Satz 1.3.3 (c) mit $\vec{x} := \vec{v} - \vec{u}$ und $\vec{y} := \vec{w} - \vec{v}$, also $\vec{x} + \vec{y} = \vec{w} - \vec{u}$. □

Definition Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal*, in Zeichen $\vec{x} \perp \vec{y}$, genau dann, wenn $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ gilt.

Der Nullvektor ist orthogonal zu jedem Vektor.

Definition Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{x}| = 1$ heißt *Einheitsvektor*.

Ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ beliebig, so ist $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ ein Einheitsvektor:

$$\left| \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{x}|} \vec{x} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{x}|} \right| |\vec{x}| = \frac{1}{|\vec{x}|} |\vec{x}| = 1.$$

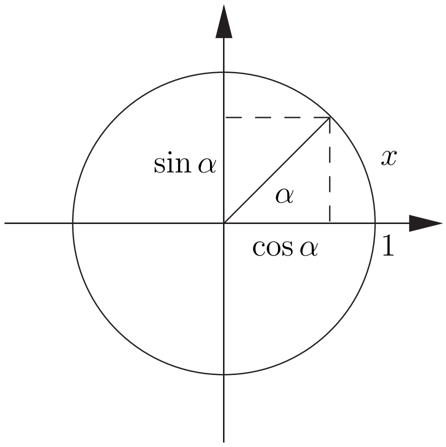
Nun wollen wir auch Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$ erklären. Dazu erinnern wir zunächst an die Definition von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ für einen Winkel α. Ist x das Bogenmaß des Winkels α, so gilt:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}.$$

Es gilt folgende Umrechnungstabelle:

Gradmaß	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Mit einem Winkel wird in Zukunft immer der Winkel im Bogenmaß gemeint sein. Dann sind $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ anhand der folgenden Zeichnung definiert:



Es gilt

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Ist ein Wert $y \in \mathbb{R}$, $-1 \leq y \leq 1$, vorgegeben, so gibt es genau einen Winkel α mit $0 \leq \alpha \leq \pi$ mit $\cos\alpha = y$. Es gilt

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Nun betrachten wir zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt dann

$$-1 \leq \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \leq 1.$$

Es gibt also ein $\alpha \in [0, \pi]$, so dass

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}.$$

Definition Der *Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$*, in Zeichen $\angle(\vec{x}, \vec{y})$, ist definiert als diejenige Zahl α mit $0 \leq \alpha \leq \pi$, so dass

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}.$$

Satz 1.3.5 (Eigenschaften des Winkels) (a) *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$ gilt*

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

(b) *Für* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *und* $\vec{y} \neq \vec{0}$ *gilt*

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \angle(\vec{y}, \vec{x}).$$

(c) *Für* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *und* $\vec{y} \neq \vec{0}$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *mit* $\lambda\mu > 0$ *gilt*

$$\angle(\lambda\vec{x}, \mu\vec{y}) = \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

(d) *Für* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *und* $\vec{y} \neq \vec{0}$ *gilt* $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ *oder* $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi$ *genau dann, wenn es ein* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit* $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ *gibt.*

Beweis. Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. □

Wir wollen nun zeigen, dass die Definition des Winkels mit der anschaulichen Definition übereinstimmt. Dazu beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$. Es seien also $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ von Null verschiedene Vektoren und

$$\vec{x}' := \frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}, \quad \vec{y}' := \frac{1}{|\vec{y}|}\vec{y}.$$

Da $|\vec{x}'| = |\vec{y}'| = 1$, gibt es $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$, so dass

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= (\cos\alpha, \sin\alpha), \\ \vec{y}' &= (\cos\beta, \sin\beta). \end{aligned}$$

Aus Satz 1.3.5 (iii) und der Definition des Winkels folgt

$$\cos\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \cos\angle(\vec{x}', \vec{y}') = \vec{x}' \cdot \vec{y}'.$$

Es gilt

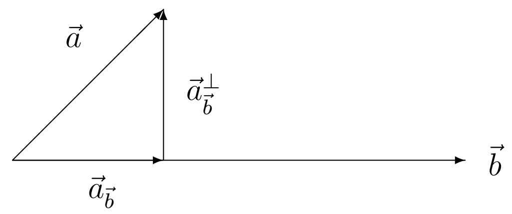
$$\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha),$$

also

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \beta - \alpha.$$

Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Definition Mit $\vec{a}_{\vec{b}}$ bezeichnen wir die *orthogonale Projektion von* $\vec{a}$ *auf* $\vec{b}$ (siehe Abbildung).



Zur Berechnung von $\vec{a}_{\vec{b}}$ bemerken wir:

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = |\vec{a}| \cos\alpha = |\vec{a}| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Also gilt:

$$\boxed{\vec{a}_{\vec{b}} = \left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}$$

Es sei $\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp} := \vec{a} - \vec{a}_{\vec{b}}$. Dann gilt

$$\boxed{\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$$

Zum Abschluss geben wir noch eine Anwendung.

Übungsaufgabe 1.3.1 Wir wollen die Entfernung zwischen zwei Orten A und B bestimmen. Wir kennen nur die Entfernung zu einem dritten Ort C und den Winkel α, den die Verbindungsgeraden $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bilden.

Lösung: Wir legen den Ursprung unseres Koordinatensystems in den Punkt C. Es sei $\vec{x} = A - C$ und $\vec{y} = B - C$. Dann ist gesucht:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}|.$$

Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned} |\vec{y} - \vec{x}|^2 &= (\vec{y} - \vec{x})\cdot(\vec{y} - \vec{x}) \\ &= \vec{y}\cdot\vec{y} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{x} \\ &= |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\alpha + |\vec{x}|^2. \end{aligned}$$

Wir haben damit auch bewiesen:

Satz 1.3.6 (Kosinussatz) *Für zwei Vektoren $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\boxed{|\vec{y} - \vec{x}|^2 = |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) + |\vec{x}|^2}$$

1.4 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Wir wollen nun das Vektorprodukt einführen. Dies ist aber nur für Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ definiert.

Definition Für Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ aus $\mathbb{R}^3$ ist das *Vektorprodukt* $\vec{x} \times \vec{y}$ definiert durch

$$\vec{x} \times \vec{y} := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Man beachte, dass $\vec{x} \times \vec{y}$ wieder ein Vektor des $\mathbb{R}^3$ ist. Um sich diese Definition leichter merken zu können, geben wir noch eine Merkregel an. Wir schreiben die Vektoren als Spaltenvektoren:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die erste Komponente (Zeile) des Vektors $\vec{x} \times \vec{y}$, indem wir die erste Zeile abdecken und die *Determinante*

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2$$

berechnen. Entsprechend ist die zweite Komponente gleich *minus* (!) der Determinante, die man erhält, wenn man die zweite Zeile streicht. Schließlich erhält man die dritte Komponente, indem man die dritte Zeile streicht und die verbleibende Determinante ausrechnet.

Wir notieren nun einige Eigenschaften des Vektorprodukts.

Satz 1.4.1 (Eigenschaften des Vektorprodukts) (a) *Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} &= \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}, \\ \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}, \\ (\lambda\vec{x}) \times \vec{y} &= \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\lambda\vec{y}). \end{aligned}$$

(b) *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{y} = 0.$$

(c) *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2.$$

(d) *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x} \text{ und } \vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.$$

Beweis. Alle Eigenschaften kann man einfach nachrechnen. Wir führen den Beweis von (c) vor. Es sei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\vec{x} \times \vec{y}|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 + (x_3y_1)^2 + (x_1y_3)^2 + (x_2y_3)^2 + (x_3y_2)^2 \\
&\quad -2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_2x_3y_2y_3 \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\
&= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2.
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.4.1 *Für vom Nullvektor verschiedene $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Beweis. Es sei $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y})$. Nach Satz 1.3.5 (a) gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \theta.$$

Nach Satz 1.4.1 (c) folgt also

$$\begin{aligned}
|\vec{x} \times \vec{y}|^2 &= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \\
&= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2(1 - \cos^2 \theta) \\
&= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Wegen $\theta \in [0, \pi]$ ist $\sin \theta \geq 0$. Also können wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen und die Behauptung folgt. □

Wir erhalten damit die übliche geometrische Beschreibung des Vektorprodukts. Nach Satz 1.4.1 (a),(ii) steht der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ senkrecht auf der von den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Ebene. Seine Länge ist nach der Formel von Korollar 1.4.1 gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms. Nun gibt es, wenn $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$, genau zwei Vektoren mit diesen Eigenschaften. Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ berechnet sich nach der *Rechte-Hand-Regel*: Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung von $\vec{x}$ und der Zeigefinger in die Richtung von $\vec{y}$, so zeigt der Mittelfinger in die Richtung von $\vec{x} \times \vec{y}$.

Definition Zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ des $\mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig* genau dann, wenn für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}$$

gilt, notwendigerweise $\lambda = \mu = 0$ folgt. Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ heißen *linear abhängig* genau dann, wenn sie nicht linear unabhängig sind, d.h. wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$ gibt, so dass

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}.$$

Der folgende Satz macht diese Definition etwas verständlicher.

Satz 1.4.2 *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sind folgende Bedingungen gleichwertig:*

(a) *$\vec{x}, \vec{y}$ sind linear abhängig.*

(b) *$\vec{x} = \vec{0}$ oder es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{y} = \rho\vec{x}$.*

(c) *$\vec{y} = \vec{0}$ oder es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{x} = \rho\vec{y}$.*

Beweis.
(a) $\Rightarrow$ (b): Sind $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$, so dass $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}$. Ist $\mu = 0$, so muss $\lambda \neq 0$ sein. Aus $\lambda\vec{x} = \vec{0}$ folgt dann aber $\vec{x} = \vec{0}$. Ist $\mu \neq 0$, dann gilt

$$\vec{y} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{x},$$

also $\vec{y} = \rho\vec{x}$ mit $\rho := -\lambda/\mu$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist $\vec{x} = \vec{0}$, so gilt $1\vec{x} + 0\vec{y} = \vec{0}$. Ist $\vec{y} = \rho\vec{x}$, so gilt $-\rho\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. In beiden Fällen sind also $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig.

Der Beweis von (a) $\Leftrightarrow$ (c) geht analog. □

Satz 1.4.3 *Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ gilt.*

Beweis. $\Rightarrow$: Die Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ seien linear abhängig. Aus Satz 1.4.2 folgt, dass dann $\vec{x} = \vec{0}$ gilt oder es ein $\rho \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{y} = \rho\vec{x}$. Ist $\vec{x} = \vec{0}$, so gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \times \vec{y} = \vec{0}.$$

Ist $\vec{y} = \rho\vec{x}$, so gilt nach Satz 1.4.1

$$\vec{x} \times \vec{y} = (\rho\vec{y}) \times \vec{y} = \rho(\vec{y} \times \vec{y}) = \vec{0}.$$

$\Leftarrow$: Es sei $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$. Ist $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$, so sind $\vec{x}, \vec{y}$ nach Satz 1.4.2 linear abhängig. Es sei also $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$. Nach Korollar 1.4.1 gilt

$$0 = |\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin\angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

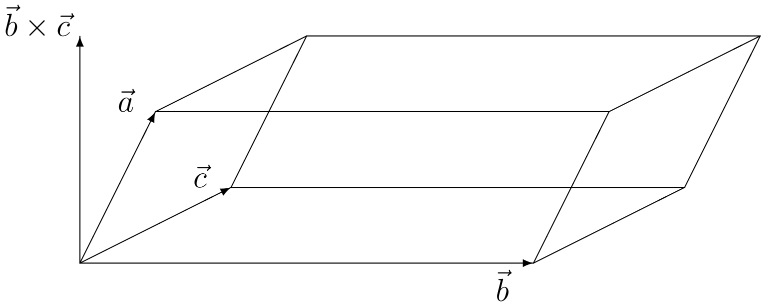
Ist $\theta := \angle(\vec{x}, \vec{y})$, so folgt $\sin\theta = 0$, also $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$. Das bedeutet aber, dass es ein $\rho \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{y} = \rho\vec{x}$. Nach Satz 1.4.2 sind $\vec{x}, \vec{y}$ daher linear abhängig. □

Definition Das *Spatprodukt* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ der drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Der Betrag des Spatprodukts $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ ist das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten *Spats*:

$$\begin{aligned} V &= \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} \\ &= |\vec{b} \times \vec{c}| \, |\vec{a}_{\vec{b}\times\vec{c}}| \\ &= |\vec{b} \times \vec{c}| \left| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|^2} \vec{b} \times \vec{c} \right| \\ &= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|. \end{aligned}$$



Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ rechnen wir aus:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \end{aligned}$$

Den letzten Ausdruck kürzen wir ab durch

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Merkregel:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & & \end{array}$$

1.5 Geraden und Ebenen

Wir betrachten zunächst Geraden im $\mathbb{R}^2$.

Definition Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Gerade (in Koordinatenform)*, wenn es $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ gibt, so dass

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b\}.$$

Definition Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{w} \neq \vec{0}$ definieren wir

$$\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w} := \{\vec{x} = \vec{v} + \lambda\vec{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Menge heißt *Gerade (in Parameterform)*. Der Vektor $\vec{v}$ heißt *Ortsvektor* und $\vec{w}$ *Richtungsvektor* der Geraden $L = \vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$.

Umrechnung Koordinatenform in Parameterform

Es sei

$$L := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$$

mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$. Wir betrachten den Fall $a_2 \neq 0$, der Fall $a_1 \neq 0$ geht analog. Wir lösen die Gleichung nach x_2 auf:

$$x_2 = \frac{1}{a_2}(b - a_1x_1).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \vec{v} &:= \left(0, \frac{b}{a_2}\right) \quad (x_1 = 0 \text{ gesetzt}), \\ \vec{w} &:= \left(1, -\frac{a_1}{a_2}\right) \quad (x_1 = 1, b = 0 \text{ gesetzt}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$L = \vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}.$$

Umrechnung Parameterform in Koordinatenform

Es sei nun $L = \vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ gegeben. Wir müssen eine Gleichung finden. Ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ und $\vec{w} = (w_1, w_2)$ mit $w_1 \neq 0$, so überlegt man sich leicht, dass folgende Gleichung gilt

$$\begin{aligned} & \frac{x_2 - v_2}{x_1 - v_1} = \frac{w_2}{w_1} \\ \Leftrightarrow \quad & w_2x_1 - w_1x_2 = w_2v_1 - w_1v_2. \end{aligned}$$

Wir definieren daher

$$a_1 := w_2, \quad a_2 := -w_1, \quad b := w_2v_1 - w_1v_2.$$

Dann gilt:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 = b\}.$$

Nun betrachten wir den $\mathbb{R}^3$, den dreidimensionalen Anschauungsraum. Dann definiert eine lineare Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ keine Gerade mehr, sondern eine Ebene. denn ist zum Beispiel $a_3 \neq 0$, so können wir die Gleichung nach x_3 auflösen

$$x_3 = \frac{1}{a_3}(b - a_1x_1 - a_2x_2),$$

und wir sehen, dass dies eine Ebene definiert.

Definition Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Ebene (in Koordinatenform)*, wenn es $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ gibt, so dass

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}.$$

Definition Es seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ seien linear unabhängig. Dann heißt

$$\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w} := \{\vec{x} = \vec{u} + \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} \,|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

eine *Ebene (in Parameterform)*. Der Vektor $\vec{u}$ heißt *Ortsvektor*, die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen die *Richtungsvektoren* der Ebene.

Umrechnung Koordinatenform in Parameterform

Es sei

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

und o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $a_3 \neq 0$. Setzt man $x_1 = \lambda_1$ und $x_2 = \lambda_2$ in die Ebenengleichung ein, so erhält man

$$x_3 = \frac{1}{a_3}(b - a_1\lambda_1 - a_2\lambda_2).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}
\vec{u} &:= (0, 0, \frac{b}{a_3}) \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ gesetzt}),\\
\vec{v} &:= (1, 0, -\frac{a_1}{a_3}) \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, b = 0 \text{ gesetzt}),\\
\vec{w} &:= (0, 1, -\frac{a_2}{a_3}) \quad (\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, b = 0 \text{ gesetzt}).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$E = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}.$$

Umrechnung Parameterform in Koordinatenform

Es seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig und $E = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$. Wir betrachten den Vektor

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) := \vec{v} \times \vec{w}.$$

Nach Satz 1.4.3 gilt $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. Es sei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E$, $\vec{x} = \vec{u} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$. Dann gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \vec{a} \cdot \vec{u}.$$

und

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \vec{a} \cdot \vec{u}\}.$$

Definition Es sei $E = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ eine Ebene. Ein Vektor $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$ und $\vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{u})$ für alle $\vec{x} \in E$ heißt ein *Einheitsnormalenvektor von E*.

Nach Satz 1.4.1 ist der Vektor

$$\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{1}{|\vec{v} \times \vec{w}|}\vec{v} \times \vec{w}$$

ein Einheitsnormalenvektor der Ebene $E = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$.

Wir können nun auch Geraden im $\mathbb{R}^3$ betrachten.

Definition Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{w} \neq \vec{0}$ definieren wir

$$\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w} := \{\vec{x} = \vec{v} + \lambda\vec{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Menge heißt *Gerade (in Parameterform)* im $\mathbb{R}^3$.

Warnung Um eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ in Koordinatenform zu beschreiben, benötigt man zwei Gleichungen, denn eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ ist der Schnitt von zwei Ebenen.

Wir betrachten nun den Abstand eines Punktes von einer Geraden oder einer Ebene. Ist $L = \vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$, so definieren wir

$$d(\vec{y}, L) = \min_{\vec{x} \in L} d(\vec{y}, \vec{x}).$$

Dann gilt

$$\boxed{d(\vec{y}, L) = \frac{|(\vec{v} - \vec{y}) \times \vec{w}|}{|\vec{w}|}}$$

Es sei $E = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ mit linear unabhängigen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Dann definieren wir

$$d(\vec{y}, E) = \min_{\vec{x} \in E} d(\vec{y}, \vec{x}).$$

Es sei $\vec{n}$ ein Einheitsnormalenvektor von E. Dann gilt

$$\boxed{d(\vec{y}, E) = |(\vec{u} - \vec{y}) \cdot \vec{n}|}$$

Es sei $d := d(\vec{0}, E)$. Ist $0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{n}) \leq \pi/2$, so gilt bereits

$$d = \vec{u} \cdot \vec{n}.$$

Damit erhalten wir die *Hessesche Normalform* der Ebenengleichung

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x} \cdot \vec{n} = d\}.$$

1.6 Komplexe Zahlen

Definition Die Menge der *komplexen Zahlen* ist die Menge

$$\mathbb{C} := \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit der Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned} (x + iy) + (x' + iy') &:= (x + x') + i(y + y') \\ (x + iy) \cdot (x' + iy') &:= (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \end{aligned}$$

(Diese Formeln kann man sich so merken: Man rechnet wie mit Zahlen unter Beachtung der Regel $i^2 = -1$.)

Die komplexe Zahl $a + bi \in \mathbb{C}$ kann man mit dem Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. Dies führt zu der Darstellung der komplexen Zahlen in der *Gaußschen Zahlenebene*. Der Addition von komplexen Zahlen entspricht die Addition der entsprechenden Vektoren. Die Multiplikation deuten wir später geometrisch.

Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$, so bestimmen wir die Zahl $\frac{1}{z}$: Es sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Also gilt

$$\boxed{\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}}$$

Definition Es sei $z = x + iy$.

- $\mathrm{Re}(z) := x$ heißt *Realteil* von z.
- $\mathrm{Im}(z) := y$ heißt *Imaginärteil* von z.
- $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ heißt der *Betrag* von z.

Zwei komplexe Zahlen z und z' sind also genau dann gleich, wenn $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$ gilt. In der Gaußschen Zahlenebene entspricht die x-Achse der reellen Achse und die y-Achse der imaginären Achse. In der Gaußschen Zahlenebene entsteht $\bar{z}$ aus z durch Spiegelung an der reellen Achse. Aus der Definition folgt

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Einfach nachzurechnen sind folgende Rechenregeln für die Konjugation:

Satz 1.6.1 *Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $\bar{\bar{z}} = z$.

(b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt der Betrag mit dem Absolutbetrag für reelle Zahlen überein. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| = |\bar{z}|$.

Satz 1.6.2 *Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis. (a) ist klar.

Zu (b): Nach Definition des Betrags ist

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Wurzelziehen liefert die Behauptung.

Zu (c): Für jede komplexe Zahl z gilt

$$\mathrm{Re}(z) \leq |z|.$$

Daraus folgt
$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1||z_2|.$$
Also gilt
$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1|+|z_2|)^2.
\end{aligned}$$
Wurzelziehen liefert wieder die Behauptung. □

Definition Es sei $z = x + iy$, $r := |z|$ und φ der Winkel von z mit der positiven x-Achse. Dann nennt man φ das *Argument* der komplexen Zahl z und
$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$
die Darstellung der Zahl in *Polarkoordinaten*.

Es seien $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Aus den Additionstheoremen für sin und cos folgt:
$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))
\end{aligned}$$
Also gilt:
$$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))}$$
Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und und ihre Argumente addiert. Es gilt:
$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \quad z \neq 0}$$
$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \quad z_2 \neq 0}$$

Satz 1.6.3 (Formel von Moivre)
$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}}$$

Definition (Eulerformel)
$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Damit haben wir die folgenden Darstellungen einer komplexen Zahl:

- *Darstellung in kartesischen Koordinaten*: $z = x + iy$
- *Darstellung in Polarkoordinaten*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- *Eulersche Darstellung*: $z = re^{i\varphi}$

Beispiel 1.6.1 Die verschiedenen Darstellungen der Zahl $z = 1 + i$:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Definition Es sei $b \neq 0$ eine komplexe Zahl. Unter einer *n-ten Wurzel* von b versteht man eine Lösung z der Gleichung $z^n = b$.

Ist $b = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$, so sind

$$\boxed{a_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,}$$

alle n-ten Wurzeln von b.

1.7 Lineare Gleichungssysteme

Definition Ein *lineares Gleichungssystem* ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Dabei sind die a_{ij} und die b_i reelle Zahlen und gesucht ist die Menge der $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, die alle Gleichungen erfüllen.

Dieses System wollen wir nun zunächst übersichtlicher aufschreiben. Die Koeffizienten a_{ij} schreibt man in einem rechteckigen Schema

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ein solches Schema nennt man eine $m \times n$-*Matrix*. Wir schreiben auch zur Abkürzung $A = (a_{ij})$. Die Matrix A heißt die *Koeffizientenmatrix* des linearen Gleichungssystems.

Die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ schreiben wir als Spaltenvektor

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die *Multiplikation einer Matrix A mit dem Vektor $\vec{x}$* erklären wir durch

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies "Zeile mal Spalte". Schreiben wir nun auch noch

$$\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

so wird unser Gleichungssystem zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Wir sehen, dass es vorteilhaft ist, Vektoren als Spaltenvektoren aufzufassen. Das werden wir in Zukunft tun. Wir werden von nun an Vektoren als Spaltenvektoren schreiben.

Wir wollen uns nun mit der Lösung eines solchen Gleichungssystems befassen. Die *Lösungsmenge* ist gleich

$$\mathcal{L}(A|\vec{b}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\}.$$

Man kann diese Lösungsmenge mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ermitteln. Dieses Verfahren wollen wir nun darstellen.

Gaußscher Algorithmus

Anstelle der Koeffizientenmatrix A betrachtet man die *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$(A|\vec{b}) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Der Gaußsche Algorithmus basiert darauf, dass die folgenden Umformungen nichts an der Lösungsmenge eines Gleichungssystems ändern:

1. Vertauschung zweier Gleichungen.
2. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\lambda \neq 0$.
3. Addition (bzw. Subtraktion) des Vielfachen einer Gleichung zu (bzw. von) einer anderen.

Diesen Gleichungsumformungen entsprechen die folgenden *elementaren Zeilenumformungen der Matrix* $(A|\vec{b})$:

1. Vertauschung zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$.
3. Addition (bzw. Subtraktion) des λ-fachen einer Zeile zu (bzw. von) einer anderen.

Das Gauß-Verfahren besteht aus drei Teilen:

I. Vorwärtselimination.

II. Lösbarkeitsentscheidung (nur für $\vec{b} \neq \vec{0}$)

III. Rückwärtssubstitution

I. Vorwärtselimination

1. Eliminationsschritt
Ist $a_{11} \neq 0$?
Wenn nein: Suche in der 1. Spalte von A ein Element $a_{k1} \neq 0$ und vertausche die k-te Zeile mit der ersten. (Sind *alle* Elemente der 1. Spalte gleich 0, so beginne man statt mit der ersten Spalte mit der ersten anderen Spalte, die nicht nur lauter Nullen enthält.)
Wenn ja:
Subtrahiere das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der 1. Zeile von der i-ten Zeile ($i = 2, \ldots, m$)
Ergebnis:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccc|c}
0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & *
\end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccl} \bullet & \neq & 0 \\ * & = & \text{beliebig} \end{array}$$

2. Eliminationsschritt
Wende das gleiche Verfahren auf die eingezeichnete Restmatrix an.

usw.

$$\vdots$$

Verfahren bricht ab, wenn folgende Matrix erreicht ist (*Zeilenstufenform*):

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & * & \cdots & * & \widetilde{b}_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & * & * & \cdots & * & \widetilde{b}_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & * & * & \cdots & * & \widetilde{b}_3 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & \cdots & * & \widetilde{b}_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \widetilde{b}_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \widetilde{b}_m
\end{array}\right)$$

Beispiel 1.7.1

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 9 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -6 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{Zeile 1} \\ \text{und Zeile 2} \\ \text{vertauschen} \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 9 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -6 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2 \times \text{Zeile 1} \\ +\text{Zeile 1} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 7 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\ \text{Zeile 2} \\ +\text{Zeile 2} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ +\frac{3}{2} \times \text{Zeile 3} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

II. Lösbarkeitsentscheidung

(entfällt für $\vec{b} = \vec{0}$) Ist eine der Zahlen $\widetilde{b}_{r+1}, \ldots, \widetilde{b}_m$ von Null verschieden, etwa nach Zeilenvertauschung $\widetilde{b}_{r+1} \neq 0$, dann ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Denn die $(r+1)$-te Gleichung ergibt den Widerspruch

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = \widetilde{b}_{r+1} \neq 0.$$

Beispiel 1.7.2 Das angebene Gleichungssystem ist nicht lösbar. Ersetzen wir allerdings $b_4 = 4$ durch $b_4 = 0$, so ist das Gleichungssystem lösbar.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 9 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

III. Rückwärtssubstitution

Dazu betrachten wir zunächst wieder das

Beispiel 1.7.3 Das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lautet explizit:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +2x_5 & = & 2 \\ & & 2x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ & & & 2x_4 & -6x_5 & = & -2 \end{array}$$

Es beschreibt die Abhängigkeit der zu den $\bullet$-Stellen gehörigen Variablen x_1, x_3, x_4 (*abhängige Variable*) von x_2, x_5 (*unabhängige Variable* oder *freie Parameter*). Setze

$$x_2 = \lambda_1, \quad x_5 = \lambda_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ variabel})$$

und bringe die freien Variablen auf die rechte Seite:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_3 + 4x_4 & = & 2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 2x_3 - x_4 & = & 1 - 2\lambda_2 \\ 2x_4 & = & -2 + 6\lambda_2 \end{array}$$

Daraus berechne man (von unten nach oben, daher Rückwärtssubstitution) der Reihe nach x_4, x_3, x_1 in Abhängigkeit von λ_1, λ_2:

$$\begin{array}{rcl} x_4 & = & -1 + 3\lambda_2, \\ x_3 & = & \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} - \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_2, \\ x_1 & = & -3x_3 - 4x_4 + 2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ & = & -\frac{3}{2}\lambda_2 + 4 - 12\lambda_2 + 2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ & = & 6 + 2\lambda_1 - \frac{31}{2}\lambda_2. \end{array}$$

Damit sieht die allgemeine Lösung wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2\lambda_1 - \frac{31}{2}\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \frac{1}{2}\lambda_2 \\ -1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{31}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

– Die zu Spalten *ohne* •-Stelle gehörenden Unbekannten sind die *freien Variablen*, sie werden der Reihe nach gleich λ_1, λ_2, ..., λ_{n-r} gesetzt.

– Gleichungssystem nach den zu •-Stellen gehörenden *abhängigen Variablen* auflösen und der Reihe nach (von unten nach oben) diese Variablen in Abhängigkeit von $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ berechnen.

Definition Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt *homogen*, wenn $\vec{b} = \vec{0}$ ist, andernfalls *inhomogen*.

Definition Die Zahl r bezeichnen wir als den *Rang* der Matrix A.

Satz 1.7.1 (a) *Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn gilt*

$$\mathrm{Rang}\,(A|\vec{b}) = \mathrm{Rang}\,A.$$

(b) *Das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat genau dann nur $\vec{x} = \vec{0}$ (*triviale Lösung*) als einzige Lösung, wenn* $\mathrm{Rang}\,A = n$ *gilt (n = Anzahl der Unbekannten).*

(c) *Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ($m < n$), dann besitzt $A\vec{x} = \vec{0}$ stets nichttriviale Lösungen.*

(d) *Gilt $m = n$, so ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn* $\mathrm{Rang}\,A = n$ *gilt.*

Beispiel 1.7.4 Gegeben seien die Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = -2\}, \\ E_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 + 2x_3 = -4\}. \end{aligned}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie den Durchschnitt der beiden Ebenen!
Lösung: Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Eine Umformung ergibt

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \\ \to &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Das bedeutet: x_3 ist eine freie Variable. Wir setzen $x_3 = \lambda$. Wir lösen das Gleichungssystem nach x_2 und x_1 auf:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\lambda + 1, \\ x_1 &= -\frac{3}{2}\lambda - 3. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist der Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v} + \lambda\vec{w}.$$

Der Schnitt der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist also die Gerade $L = \vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$.

1.8 Basis und Dimension

Definition Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Unter(vektor)raum* von $\mathbb{R}^n$, wenn gilt

(U1) $\vec{x}, \vec{y} \in U \;\Rightarrow\; \vec{x} + \vec{y} \in U$.

(U2) $\vec{x} \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{x} \in U$.

Bemerkung 1.8.1 Jeder Unterraum von $\mathbb{R}^n$ enthält den Nullvektor $\vec{0}$. Denn mit $\vec{x} \in U$ ist nach (U2) auch $\vec{0} = 0\vec{x} \in U$.

Beispiel 1.8.1 (a) $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^n$ sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$.

(b) Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, \vec{0})$ eines homogenen Gleichungssystems in n Unbekannten ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems $\mathcal{L}(A, \vec{b})$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ in n Unbekannten ist *kein* Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Definition Die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig*, falls für alle reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_k\vec{a}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \cdots = x_k = 0.$$

Das bedeutet also: Ist

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

so hat das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Sind $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie *linear abhängig*.

Definition Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist eine *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$, falls reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ existieren mit

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k.$$

Die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$

$$\mathrm{Spann}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) := \{\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

heißt der *Spann* (oder die *lineare Hülle*) von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$.

Satz 1.8.1 *Der Spann* $\mathrm{Spann}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ *von Vektoren* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ *ist ein Unterraum von* $\mathbb{R}^n$*.*

Definition Es sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \in U$. Dann heißt $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ *Basis* von U, falls folgendes gilt:

(B1) $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ sind linear unabhängig.

(B2) $U = \mathrm{Spann}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$.

Eine Basis hat folgende fundamentale Eigenschaft:

Satz 1.8.2 *Ist* $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ *eine Basis des Unterraums* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*, so lässt sich jeder Vektor* $\vec{x} \in U$ *in eindeutiger Weise als Linearkombination der* $\vec{b}_i$ *schreiben, d.h. zu* $\vec{x} \in U$ *gibt es eindeutig bestimmte Zahlen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{b}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{b}_k.$$

Beispiel 1.8.2 Die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ des $\mathbb{R}^n$. Diese Basis heißt *Standardbasis* des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.8.3 Wir betrachten wieder das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ aus Beispiel 1.7.3. Setze

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -\frac{31}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind linear unabhängig und sind Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$. Es gilt

$$\mathcal{L}(A|\vec{0}) = \mathrm{Spann}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

und $(\vec{v}_1,\, \vec{v}_2)$ ist eine Basis von $\mathcal{L}(A|\vec{0})$.

Satz 1.8.3 (Allgemeines Lösungsprinzip von LGS) (a) *Die Lösungen $\vec{x}_h$ des homogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ bilden einen Unterraum $\mathcal{L}(A|\vec{0})$ des $\mathbb{R}^n$. Ist $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ eine Basis dieses Unterraums, so lautet die allgemeine Lösung des homogenen Systems*

$$\vec{x}_h = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

(b) *Ist $\vec{x}_s$ eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ (*spezielle Lösung*), so lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:*

$$\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_h = \vec{x}_s + \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k.$$

Je zwei Basen eines Unterraums U des $\mathbb{R}^n$ haben gleich viele Elemente.

Definition Die Anzahl der Elemente einer Basis von U heißt die *Dimension* von U, in Zeichen $\dim U$.

Satz 1.8.4 (Dimensionsformel) *Für jede $m \times n$-Matrix A gilt:*

$$\dim \mathcal{L}(A|\vec{0}) = n - \mathrm{Rang}\, A.$$

1.9 Matrizen

Wir behandeln nun allgemein Matrizen. Wir legen zunächst einige Bezeichnungen fest.

Definition Eine $m \times n$-*Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen a_{ij} bezeichnet man als die *Einträge* oder die *Elemente* der Matrix. Eine $m \times 1$-Matrix bezeichnet man auch als *Spaltenvektor* und eine $1 \times n$-Matrix als einen *Zeilenvektor*. Eine $n \times n$-Matrix nennt man eine *quadratische Matrix*. In diesem Fall heißen die Elemente $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ die *Diagonalelemente* von A.

Wir definieren nun Rechenoperationen mit Matrizen. Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei $m \times n$-Matrizen. Dann ist ihre *Summe* $A + B$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ist A eine $m \times n$-Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist das *Produkt* λA definiert durch

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das *Produkt* AB einer $m \times r$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit einer $r \times n$-Matrix $B = (b_{ij})$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{rj} & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das bedeutet,

$$AB = C = (c_{ij})$$

und c_{ij} erhält man, indem man paarweise die Einträge der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B multipliziert und die entstehenden Produkte addiert, also

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}.$$

Sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ beliebige Zahlen, so schreibt man abkürzend für die Summe dieser Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Also können wir abkürzend schreiben

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}.$$

Die neue Matrix C ist eine $m \times n$-Matrix. Man merke sich: AB ist nur erklärt, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist. Es gilt die folgende Merkregel:

$$m \times r \text{ mal } r \times n \text{ ergibt } m \times n.$$

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor ist der Spezialfall $r = 1$.

Beispiel 1.9.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -8 & 11 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Eine besondere Rolle spielen die $n \times n$-Nullmatrix

$$0 = 0_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

und die $n \times n$-Einheitsmatrix

$$E = E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 1.9.1 (Rechenregeln) *Es seien alle Matrizen so gewählt, dass die Operationen definiert sind. Dann gelten die folgenden Rechenregeln*

(a) $A + B = B + A$ *(Kommutativgesetz der Addition)*

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(Assoziativgesetz der Addition)*

(c) $A + 0 = 0 + A = A$ *(neutrales Element der Addition)*

(d) $(AB)C = A(BC)$ *(Assoziativgesetz der Multiplikation)*

(e) $AE = EA = A$ *(neutrales Element der Multiplikation)*

(f) $A(B + C) = AB + AC$ *(linkes Distributivgesetz)*

(g) $(A + B)C = AC + BC$ *(rechtes Distributivgesetz)*

Beweis. Alle Aussagen betreffen die Gleichheit von Matrizen und werden bewiesen, indem man beide Seiten ausrechnet und zeigt, dass die einander entsprechenden Einträge übereinstimmen. Wir führen dies nur für die Aussage (d) vor.

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times r$-Matrix, $B = (b_{ij})$ eine $r \times s$-Matrix und $C = (c_{ij})$ eine $s \times n$-Matrix. Es gilt

$$AB = (\alpha_{il}) \text{ mit } \alpha_{il} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kl},$$

also

$$(AB)C = (d_{ij})$$

mit

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{s} \alpha_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$BC = (\beta_{kj}) \text{ mit } \beta_{kj} = \sum_{l=1}^{s} b_{kl} c_{lj},$$

also

$$A(BC) = (d'_{ij})$$

mit

$$d'_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{s} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

□

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.9.2 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $AB \neq BA$.

Definition Es sei A eine quadratische Matrix. Die Matrix A heißt *invertierbar* genau dann, wenn es eine Matrix B mit $AB = BA = E$ gibt. In diesem Fall heißt B eine *inverse Matrix* zu A.

Beispiel 1.9.3 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist A invertierbar und B ist eine inverse Matrix zu A, da

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Beispiel 1.9.4 Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar. Denn ist

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

eine beliebige 2×2-Matrix, so gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E.$$

Es ist zunächst ja nicht ausgeschlossen, dass es zu einer Matrix zwei inverse Matrizen geben kann. Der folgende Satz zeigt, dass das aber nicht möglich ist.

Satz 1.9.2 *Sind B und C inverse Matrizen zu A, so ist $B = C$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$AB = BA = E \text{ und } AC = CA = E.$$

Also gilt einerseits

$$(BA)C = EC = C$$

und andererseits

$$(BA)C = B(AC) = BE = B.$$

Also folgt $B = C$. □

Also ist die inverse Matrix zu einer Matrix A eindeutig bestimmt und wir bezeichnen sie mit A^{-1}. Es gilt also

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Beispiel 1.9.5 Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist für $ad - bc \neq 0$ invertierbar und in diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Satz 1.9.3 (a) *Für zwei invertierbare $n \times n$-Matrizen A und B ist auch das Produkt AB invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(b) *Mit A ist auch A^{-1} invertierbar und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Beweis.

(a) Es gilt

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Entsprechend zeigt man $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$. Daraus folgt, dass AB invertierbar ist und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ gilt.

(b) Wegen $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ folgt, dass A^{-1} invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$ ist. □

Satz 1.9.4 *Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang gleich n ist.*

Berechnung der inversen Matrix

Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Wir betrachten die erweiterte Matrix

$$(A|E) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & 0 \\ A & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right).$$

Zunächst wird diese Matrix durch Vorwärtselimination nach dem Gaußschen Algorithmus in eine Matrix in Zeilenstufenform verwandelt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \bullet & * & \cdots & * \end{array} \right)$$

(Wegen $\operatorname{Rang} A = n$ sind alle Diagonalelemente von Null verschieden, vgl. Satz 1.9.4.) Sodann wenden wir *Rückwärtselimination* (von unten nach oben) im ersten Block an. Ergebnis:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \bullet & * & \cdots & * \end{array} \right)$$

Auf der Diagonalen im ersten Block stehen von Null verschiedene Zahlen. Durch geeignete Multiplikation der Zeilen mit Skalaren können wir diese Elemente zu 1 machen. Damit erreichen wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & A^{-1} \\ 0 & & 1 & \end{array} \right) = (E|A^{-1}).$$

Beispiel 1.9.6

$$
\begin{array}{rll}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ -2 \times \text{Zeile } 1 \\ -\text{Zeile } 1 \end{array} \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{2}{3} \times \text{Zeile } 2 \end{array} \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} -\text{Zeile } 3 \\ +2 \times \text{Zeile } 3 \\ \\ \end{array} \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} +\frac{2}{3} \times \text{Zeile } 2 \\ \\ \\ \end{array} \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \times -\frac{1}{3} \\ \times \frac{1}{3} \end{array} \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right) &
\end{array}
$$

Definition Jeder $m \times n$-Matrix A zugeordnet ist die *transponierte Matrix* A^T, die sich aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten ergibt, d.h. A^T ist die $n \times m$-Matrix, deren i-te Spalte für $i = 1, 2, \ldots, m$ die i-te Zeile von A ist:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Die transponierte Matrix A^T entsteht durch eine Spiegelung der Matrix A an der Hauptdiagonale.

Beispiel 1.9.7

$$
A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Satz 1.9.5 (Rechenregeln für die transponierte Matrix) *Es seien alle Matrizen so gewählt, dass die Operationen definiert sind. Dann gelten die folgenden Rechenregeln*

(a) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(b) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ *für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $(A^T)^T = A$.

(d) $(AB)^T = B^T A^T$.

(e) *Mit* A *ist auch* A^T *invertierbar und es gilt* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis. Die Aussagen (a)-(c) sind leicht nachzurechnen.

(d) Es sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times r$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $r \times n$-Matrix. Dann gilt

$$AB = (c_{ij}) \text{ mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj},$$

also

$$(AB)^T = (c_{ji}) = (\sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}).$$

Auf der anderen Seite gilt

$$B^T A^T = (d_{ij}) \text{ mit } d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki} a_{jk},$$

also $(AB)^T = B^T A^T$.

(e) Es gilt nach (d)

$$\begin{aligned} A^T (A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T = E^T = E, \\ (A^{-1})^T A^T &= (AA^{-1})^T = E^T = E. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

1.10 Determinanten

In §1.4 haben wir bereits Determinanten von 2×2- und 3×3-Matrizen betrachtet. Wir wollen nun die Definition der Determinante einer $n \times n$-Matrix geben.

Definition Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Die Matrix A_{ij} entstehe aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A, d.h.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition Es sei A eine $n \times n$-Matrix.
$n = 1$: Ist $A = (a_{11})$, so sei $\det A = a_{11}$.
$n = 2$: Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

so sei

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

$n = 3$: Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

so sei

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31}.$$

$n \to n+1$: Ist $\det B$ für jede $n \times n$-Matrix B bereits definiert, so sei für eine $(n+1) \times (n+1)$-Matrix A

$$\det A = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \quad \text{(Entwicklung nach der ersten Spalte)}$$

Für $\det A$ ist auch die Notation $|A|$ üblich.

Die Berechnung der Determinante einer 3×3-Matrix merkt man sich mit Hilfe der folgenden Regel:

Regel von Sarrus: *Man schreibe die ersten beiden Spalten der Matrix noch einmal hinter die Matrix und multipliziere entlang der angedeuteten Pfeile, wobei die elementaren Produkte längs der nach oben gerichteten Pfeile mit dem Vorzeichen − zu versehen sind:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Beispiel 1.10.1 Die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\det A = 2 + 0 + (-6) - (-4) - 1 - 0 = -1.$$

Warnung Die Regel von Sarrus funktioniert nur für 3×3-Matrizen, *nicht* für größere Matrizen!

Beispiel 1.10.2 Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist:

$$\det A = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3.$$

Satz 1.10.1 (Rechenregeln für Determinanten) *Es sei A eine $n \times n$-Matrix.*

1. det *ist* linear in jeder Zeile (oder Spalte)*, d.h. es gilt*

(a) *Ist B die Matrix, die durch Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) von A mit einer Konstanten λ entsteht, so ist* $\det B = \lambda \det A$.

(b) *Es seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a_n}$ die Zeilenvektoren von A und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ (als Zeilenvektor aufgefasst). Dann gilt*

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k + \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}.$$

(Eine entsprechende Aussage gilt auch für Spaltenvektoren.)

2. det *ist* alternierend*, d.h.*

(a) *Ist B die Matrix, die aus A durch Vertauschung zweier Zeilen (oder Spalten) entsteht, so ist* $\det B = -\det A$.

(b) *Kommt in A eine Zeile (oder Spalte) doppelt vor, so gilt* $\det A = 0$.

3. Änderung bei elementaren Zeilenumformungen*: Ist B die Matrix, die aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen entsteht, so gilt* $\det B = \det A$.

4. Symmetrie

$$\det A^T = \det A.$$

5. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

6. **Multiplikationssatz** *Für zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt:*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

7. **Invertierbarkeitstest** *A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$ *gilt. In diesem Fall gilt*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

8. **Kästchensatz** *Hat A die Gestalt*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ bzw. } A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Kästchen B und D, so gilt

$$\det A = (\det B)(\det D).$$

Satz 1.10.2 (Laplacescher Entwicklungssatz) *Es sei A eine $n \times n$-Matrix, $1 \leq k \leq n$. Dann gilt*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \quad \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte)}$$

und

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \quad \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Zeile).}$$

Die Vorzeichen in Satz 1.10.2 sind gemäß eines Schachbrettmusters verteilt:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun Anwendungen von Determinanten auf lineare Gleichungssysteme.

Satz 1.10.3 *Ist A eine $n \times n$-Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $A\vec{x} = \vec{b}$ *besitzt genau eine Lösung.*

(b) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

(c) *Der Rang von A ist n.*

(d) *A ist invertierbar.*

(e) $\det A \neq 0$.

Beispiel 1.10.3 Ein Anwendungsbeispiel:
Aufgabe: Bilden die Vektoren

$$\vec{a}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$?
Lösung: Die Antwort ist ja: Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\det A = 6 \neq 0$. Nach Satz 1.10.3(b) sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängig. Es gilt $\mathrm{Spann}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \mathbb{R}^3$, denn für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ hat nach Satz 1.10.3(a) das lineare Gleichungssystem

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = A\vec{x} = \vec{b}$$

eine Lösung.

Kapitel 2

Lineare Algebra II

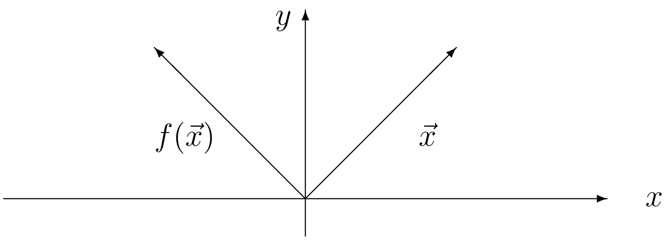
2.1 Lineare Abbildungen

Definition Eine *Abbildung* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine Vorschrift, die jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ einen eindeutig bestimmten Vektor $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet[1].
Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *linear*, wenn gilt:

(L1) $f(\vec{x} + \vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}')$ für alle $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^n$.

(L2) $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.1.1 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung, die jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ sein Spiegelbild bezüglich der y-Achse zuordnet.



Das Bild $f(\vec{x})$ ist wieder ein Vektor. Wir bezeichnen die Komponenten dieses Vektors mit $f_1(\vec{x})$ und $f_2(\vec{x})$. Es gilt

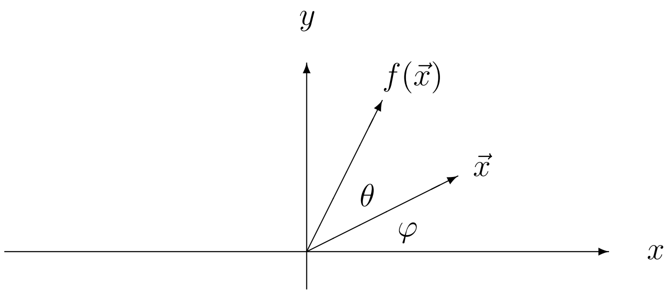
$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dies können wir auch so ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

[1] Statt $f(\vec{x}) = f((x_1, \ldots, x_n))$ schreiben wir auch $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Beispiel 2.1.2 Wir betrachten nun die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die einen Vektor $\vec{x}$ um den Winkel θ dreht. Um eine Beschreibung für $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ abzuleiten, betrachten wir eine Drehung um einen positiven Winkel θ. Es sei φ der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{x}$ und der positiven x-Achse und r die Länge von $\vec{x}$.



Dann gilt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

und

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi + \theta) \\ r\sin(\varphi + \theta) \end{pmatrix}.$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme von sin und cos ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ f_2(x, y) &= r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta, \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ f_2(x, y) &= (\sin\theta)x + (\cos\theta)y. \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise lautet dies

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.1.3 Nun betrachten wir auch Abbildungen des Raumes. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um die x-Achse um den Winkel θ. Wie im vorigen Beispiel leitet man her, dass diese Abbildung durch die folgende Vorschrift gegeben wird:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.1.4 Die Beispiele von Abbildungen der Ebene und des Raumes sind Spezialfälle der folgenden Konstruktion. Einer $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kann man wie folgt eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zuordnen: Wir definieren

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

oder anders ausgedrückt

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Nach den Rechenregeln für Matrizen gilt

$$A(\vec{x} + \vec{x}') = A\vec{x} + A\vec{x}', \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}.$$

Also ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear.

Beispiel 2.1.5 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist nicht linear, denn es gilt

$$f(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

und etwa für $\lambda = 2$ ist $\lambda^2 \neq \lambda$.

2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es wenigstens einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, gibt mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Jeder Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, der diese Gleichung erfüllt, heißt *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ.

Warnung Wichtig ist, dass $\vec{x} \neq \vec{0}$ gefordert wird. Denn für den Nullvektor gilt $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$!

Beispiel 2.2.1 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um die x-Achse um den Winkel θ und A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dann ist 1 ein Eigenwert von A und der Vektor $(1,0,0)^T \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.

Wie berechnet man nun die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix? Dazu betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & A\vec{x} = \lambda\vec{x} \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ein Eigenwert von A ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, für die dieses Gleichungssystem eine nicht triviale Lösung besitzt. Nach Satz 1.10.3 ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Diesen Ausdruck fassen wir als eine Gleichung für unsere Unbekannte λ auf. Dieser Ausdruck ist ein *Polynom* in λ.

Beispiel 2.2.2 Für eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc. \end{aligned}$$

Definition Die Gleichung (für die Unbekannte λ)

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

heißt die *charakteristische Gleichung* von A und das Polynom (in der Variablen λ)

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$$

heißt das *charakteristische Polynom* von A.

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Schritt Bestimme die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$. Die Vielfachheit ℓ einer Nullstelle $\lambda = \alpha$ heißt die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes α.

2. Schritt Zu jedem Eigenwert α berechnet man den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \alpha E)\vec{x} = \vec{0}.$$

Wir bezeichnen diesen Lösungsraum mit

$$V(\alpha) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \alpha E)\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Jede Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ ist ein Eigenvektor zu α.

Definition Der Unterraum $V(\alpha)$ von $\mathbb{R}^n$ heißt der *Eigenraum* von A zum Eigenwert α. Die Dimension $\dim V(\alpha)$ heißt die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes α.

Beispiel 2.2.3 Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Schritt: Charakteristisches Polynom:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}.$$

2. Schritt: Für λ_i ($i = 1, 2$) ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_i & b \\ c & d - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Es gibt vier verschiedene Fälle:

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

(b) $\lambda_1 = \lambda_2$, geometrische Vielfachheit 2,

(c) $\lambda_1 = \lambda_2$, geometrische Vielfachheit 1,

(d) Die charakteristische Gleichung $P_A(\lambda) = 0$ hat keine reellen Nullstellen.

Für jeden dieser Fälle betrachten wir nun ein Beispiel:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$
$V(\lambda_1)$ eindimensional mit Basis $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$V(\lambda_2)$ eindimensional mit Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
Eigenraum: $V(\lambda_1) = \mathbb{R}^2$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
Eigenraum: $V(\lambda_1)$ eindimensional mit Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Nullstelle.

2.3 Koordinatentransformation

Definition Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

die Matrix, deren Spalten aus den Bildern der Standardbasisvektoren bestehen. Man nennt A die *Abbildungsmatrix* von f bezüglich der Standardbasis.

Satz 2.3.1 *Es gilt $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Für $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ folgt:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= A\vec{x}. \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.3.2 *Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist bereits durch die Bilder der Vektoren einer Basis vollständig festgelegt.*

Man kann Abbildungen hintereinanderausführen:

Definition Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sowie $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ Abbildungen, so heißt die Abbildung

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell, \quad (g \circ f)(\vec{x}) := g(f(\vec{x})),$$

die *Komposition* (oder *Hintereinanderschaltung*) von f und g. (Man sagt zu $g \circ f$ auch g "Kringel" f.)

Satz 2.3.3 *Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sowie $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ Abbildungen.*

(a) *Sind f und g linear, so ist auch $g \circ f$ linear.*

(b) *Sind f und g linear, A die Abbildungsmatrix von f, B die Abbildungsmatrix von g, so ist BA die Abbildungsmatrix von $g \circ f$.*

Definition Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *invertierbar* (oder *umkehrbar*), wenn es zu jedem $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ genau ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $f(\vec{x}) = \vec{y}$. In diesem Fall existiert die mit $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezeichnete *Umkehrabbildung* (oder *inverse Abbildung*), mit der jedem $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ das eindeutig bestimmte $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\vec{x}) = \vec{y}$ zugeordnet wird ($f(\vec{x})$ wird unter f^{-1} wieder auf $\vec{x}$ abgebildet).

Satz 2.3.4 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A.*

(a) *Ist f invertierbar, so ist auch f^{-1} linear und A^{-1} ist die Abbildungsmatrix von f^{-1}.*

(b) *f ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist.*

Definition (a) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *orthogonal*, wenn sie das Skalarprodukt invariant lässt, d.h. wenn

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Eine $n \times n$-Matrix A heißt *orthogonal*, wenn gilt:

$$A^T A = E \quad (\text{also } A^T = A^{-1}).$$

(c) Eine Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ heißt *orthogonal*, wenn die Basisvektoren $\vec{b}_i$ paarweise orthogonal sind, d.h. wenn

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0 \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Die Basis heißt *orthonormal*, wenn sie orthogonal ist und alle Basisvektoren Einheitsvektoren sind, d.h.

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0 \text{ für alle } i \neq j \text{ und } |\vec{b}_i| = 1.$$

Beispiel 2.3.1 Die Standardbasis $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis.

Satz 2.3.5 *Für eine orthogonale $n \times n$-Matrix A gilt*

$$\det A = \pm 1.$$

Satz 2.3.6 *Für eine $n \times n$-Matrix A sind äquivalent:*

(a) *A ist orthogonal.*

(b) *$(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.*

(c) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.*

Korollar 2.3.1 *Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Abbildungsmatrix orthogonal ist.*

Beispiel 2.3.2 (a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um die x-Achse um den Winkel θ. Dann hat f die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

DIe Abbildung f und die Matrix A sind orthogonal.
(b) Es sei $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Wir betrachten die Spiegelung an der zu $\vec{a}$ orthogonalen Ebene $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{a} \cdot \vec{x} = 0\}$. Dies ist die Abbildung

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad s(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a}.$$

Dann ist s orthogonal. Die Abbildungsmatrix von s bezüglich der Standardbasis ist die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} s(\vec{e}_1) & s(\vec{e}_2) & s(\vec{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_2a_1 & -2a_3a_1 \\ -2a_1a_2 & 1-2a_2^2 & -2a_3a_2 \\ -2a_1a_3 & -2a_2a_3 & 1-2a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det S = -1$.

Es sei $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 1.8.2 besitzt ein beliebiger Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Darstellung

$$\vec{x} = x_1'\vec{b}_1 + \ldots + x_n'\vec{b}_n.$$

Definition Die eindeutig bestimmten Koeffizienten $x_i' \in \mathbb{R}$ heißen *Koordinaten des Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich B* und

$$\vec{x}_B = \vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

heißt der *Koordinatenvektor* von $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *bezüglich B*. Die Abbildung

$$t_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad t_B(\vec{x}) = \vec{x}_B,$$

ist linear und heißt die *Koordinatentransformation*.

Wir bezeichnen mit B nun auch die invertierbare $n \times n$-Matrix mit den Spalten $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\vec{x} = x_1'\vec{b}_1 + \ldots + x_n'\vec{b}_n = B \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = B\vec{x}_B.$$

Damit gilt für den Basiswechsel von der Standardbasis $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ nach $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$:

Substitutionsformel:	$\vec{x} = B\vec{x}_B$
Transformationsformel:	$\vec{x}_B = B^{-1}\vec{x}$

Definition Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Die Matrix

$$C := \left(\begin{array}{ccc} f(\vec{b}_1)_B & \cdots & f(\vec{b}_n)_B \end{array} \right),$$

in deren Spalten die Koordinatenvektoren der Bildvektoren $f(\vec{b}_i)$ bezüglich B stehen, heißt *Abbildungsmatrix von f bezüglich B*.

Satz 2.3.7 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Ist A die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, so lautet die Abbildungsmatrix C von f bezüglich B:*

$$C = B^{-1}AB.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} C &= \left(\begin{array}{ccc} (A\vec{b}_1)_B & \cdots & (A\vec{b}_n)_B \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{ccc} B^{-1}A\vec{b}_1 & \cdots & B^{-1}A\vec{b}_n \end{array} \right) \quad \text{(Transformationsformel)} \\ &= B^{-1}A \left(\begin{array}{ccc} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{array} \right) \\ &= B^{-1}AB. \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.3.3 Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Wir betrachten die Spiegelung an der zu $\vec{a}$ orthogonalen Ebene $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{a} \cdot \vec{x} = 0\}$ (vgl. Beispiel 2.3.2(b)). Wir wollen eine möglichst einfache Abbildungsmatrix von s bestimmen. Dazu sei $\vec{b}$ ein Einheitsvektor, der in der Ebene E liegt, also orthogonal zu $\vec{a}$ ist. Dann ist der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ebenfalls ein Einheitsvektor und orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Wir betrachten die Basis $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$. Es gilt

$$s(\vec{a}) = -\vec{a}, \quad s(\vec{b}) = \vec{b}, \quad s(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Die Abbildungsmatrix von C von s bezüglich der Basis B sieht also wie folgt aus:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det C = -1$. Die Matrix C hat den Eigenwert $\lambda = -1$ mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{a}$, denn es gilt $C\vec{a} = -\vec{a}$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$. Außerdem hat C den Eigenwert $\lambda = 1$ und alle $\vec{b} \in E$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind Eigenvektoren zu $\lambda = 1$.

Kapitel 3

Funktionen

3.1 Polynome und rationale Funktionen

Definition Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine *Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Die Menge D bezeichnet man als den *Definitionsbereich* der Funktion.

Man veranschaulicht sich eine Funktion durch einen Graphen. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt die Menge

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in D, y = f(x)\}$$

der *Graph* der Funktion f. Der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - x$ ist in Abb. 3.1 angegeben.

Typische Definitionsbereiche sind *Intervalle*:

Definition Es sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$\begin{array}{rcll} [a, b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} & \textit{abgeschlossenes Intervall}, \\ [a, b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} & \textit{halboffenes Intervall}\ , \\ (a, b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} & \textit{halboffenes Intervall}\ , \\ (a, b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} & \textit{offenes Intervall}\ . \end{array}$$

Die Zahl $b - a$ bezeichnet man als die *Länge* des Intervalls. Ebenso definiert man die *uneigentlichen Intervalle*:

$$\begin{array}{rcl} [a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}, \\ (a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}, \\ (-\infty, a] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}, \\ (-\infty, a) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}. \end{array}$$

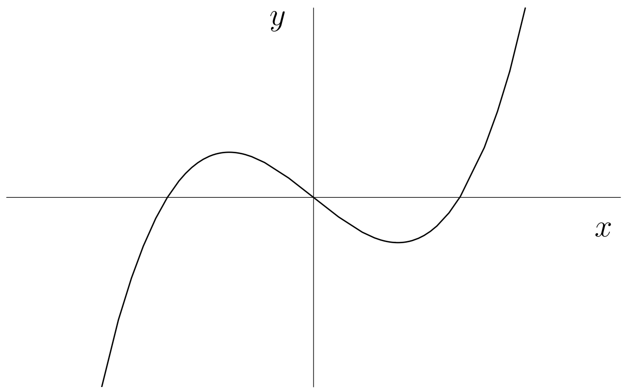


Abbildung 3.1: Graph von $f(x) = x^3 - x$

Frage: Was ist $(-\infty, \infty)$?
Antwort: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Warnung $-\infty$, ∞ sind nur Symbole. Es gilt $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Intervalle $[-\infty, b]$, $[a, \infty]$ usw. gibt es nicht!

Definition (Fakultät) Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ setzen wir

$$\begin{aligned} n! &:= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \quad n \textit{ Fakultät}, \\ 0! &:= 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1.1 Eine alternative Definition ist eine *rekursive* Definition von $n!$:

$$\begin{aligned} 0! &:= 1, \\ n! &:= n \cdot (n-1)! \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Definition (Binomialkoeffizient) Es seien $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad \textit{Binomialkoeffizient}$$

Beispiel 3.1.1 Es gilt

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Dies ist das PASCALsche Dreieck.

Notation Für eine reelle Zahl a setzen wir

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1, \\ a^n &:= a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (n Faktoren)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Satz 3.1.1 (Binomische Formel) *Es seien a, b reelle Zahlen. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Nun betrachten wir Beispiele für Funktionen.

Definition Ein *Polynom* mit reellen Koeffizienten ist ein Ausdruck

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$. Der Buchstabe x ist hier nur ein Symbol, eine Unbestimmte. Die a_i bezeichnet man als die *Koeffizienten* des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* des Polynoms $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

Polynome kann man addieren und multiplizieren:

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) \\ &\quad = \ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots, \\ &(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) \\ &\quad = \ a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \cdots \\ &\quad = \ c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}, \end{aligned}$$

wobei $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_j = 0$ für $j > m$ gesetzt wird und

$$c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n+m.$$

Jedes Polynom

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

liefert nun eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha \in \mathbb{R} \mapsto f(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_n \alpha^n \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion nennt man auch eine *ganzrationale Funktion.*

Satz 3.1.2 (Koeffizientenvergleich)

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \Leftrightarrow a_k = b_k \quad (0 \leq k \leq n).$$

Abkürzend verwenden wir auch für ein Polynom $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ die Schreibweise $f(x)$. Die Funktionswerte eines Polynoms berechnet man zweckmäßigerweise nach dem *Hornerschema*:

$$f(x) = (\cdots((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Definition Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *Nullstelle* des Polynoms $f(x)$ genau dann, wenn $f(\alpha) = 0$.

Satz 3.1.3 *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle des Polynoms $f(x)$, dann gibt es ein Polynom $g(x)$, so dass*

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x).$$

Beweis. Durch Ausmultiplizieren sieht man

$$x^p - \alpha^p = (x - \alpha)(x^{p-1} + \alpha x^{p-2} + \alpha^2x^{p-3} + \cdots + \alpha^{p-2}x + \alpha^{p-1}).$$

Es sei $f(\alpha) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n - (a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n) \\ &= a_1(x - \alpha) + a_2(x^2 - \alpha^2) + \cdots + a_n(x^n - \alpha^n). \end{aligned}$$

□

Definition Man nennt $\alpha \in \mathbb{R}$ eine *ℓ-fache Nullstelle* des Polynoms $f(x)$ und ℓ die *Vielfachheit* von α, wenn der Linearfaktor $x - \alpha$ genau ℓ-mal in $f(x)$ aufgeht, d.h. wenn es ein Polynom $g(x)$ gibt mit

$$f(x) = (x - \alpha)^\ell g(x) \text{ und } g(\alpha) \neq 0.$$

Satz 3.1.4 *Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Definition Der Quotient zweier Polynome

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$$

heißt *rationale Funktion*.

Die Polynome definieren spezielle rationale Funktionen ($q(x) = 1$), dies erklärt den Namen "ganzrationale Funktionen".

Satz 3.1.5 *Jede rationale Funktion*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$$

mit Zählergrad $\geq$ *Nennergrad lässt sich schreiben als*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

mit einem Polynom $h(x)$ *(dem* ganzen Anteil *der rationalen Funktion) und einem Restpolynom* $r(x)$ *mit* $r(x) = 0$ *oder* $\operatorname{Grad} r(x) < \operatorname{Grad} q(x)$.

Beweis und Rechenverfahren (Polynomdivision mit Rest)

(1) Setze
$$p_1(x) := p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x).$$
Dann gilt
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$
und $\operatorname{Grad} p_1(x) < \operatorname{Grad} p(x)$.

(2) Ist $p_1(x) = 0$ oder $\operatorname{Grad} p_1(x) < \operatorname{Grad} q(x)$, dann sind wir fertig. Andernfalls wiederhole man (1) mit
$$\frac{p_1(x)}{q(x)} \text{ anstelle von } \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Beispiel 3.1.2

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
(x^3 & + & 2x^2 & + & & & 1) & : & (x^2+2) \;=\; x + 2 + \frac{-2x-3}{x^2+2} \\
x^3 & + & & & 2x & & & & \\
\hline
 & & 2x^2 & - & 2x & + & 1 & & \\
 & & 2x^2 & & & + & 4 & & \\
\cline{3-7}
 & & & - & 2x & - & 3 & &
\end{array}$$

Definition Das Polynom $d(x)$ heißt *Teiler* des Polynoms $p(x)$, wenn es ein Polynom $p_0(x)$ gibt mit $\operatorname{Grad} p_0(x) \geq 1$ und $p(x) = d(x) p_0(x)$.

Ebenso wie bei normalen Brüchen ist es auch bei rationalen Funktionen wichtig, die gemeinsamen Teiler des Zählers und des Nenners zu kürzen.

Gegeben sei eine rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Wir setzen voraus, dass $p(x)$ und $q(x)$ keinen gemeinsamen Teiler mehr besitzen. Dann haben $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen. Der Definitionsbereich von f ist

$$D := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}.$$

Definition Eine ℓ-fache Nullstelle α des Nenners,

$$q(x) = (x - \alpha)^\ell q_1(x) \text{ mit } q_1(\alpha) \neq 0,$$

heißt *ℓ-facher Pol* von f.

3.2 Folgen und Reihen

Wir betrachten nun (unendliche) Folgen von Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Dabei stehen die drei Pünktchen für "unendlich oft so weiter".

Definition Unter einer *Folge* reeller Zahlen versteht man eine auf $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ erklärte reellwertige Funktion, d.h.

$$n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Bemerkung 3.2.1 Es spielt im Prinzip keine Rolle, mit welchem Index man beginnt. Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dann bezeichnet man $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$$

auch als Folge.

Beispiel 3.2.1 (1) Es sei $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die konstante Folge $1, 1, 1, \ldots$.

(2) $a_n := \frac{1}{n}$, $(n \geq 1)$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

(3) $a_n := a_0 + nd$ $(n \geq 0, d \in \mathbb{R})$: $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \ldots$
(*arithmetische* Folge)
Zahlenbeispiel: $a_0 = 1$, $d = 2$: $1, 3, 5, 7, \ldots$.

(4) $a_n := a_0 q^n$ ($n \geq 0, q \neq 0$ fest): $a_0, a_0 q, a_0 q^2, \ldots$
(*geometrische* Folge)
Zahlenbeispiel: $a_0 = 1$, $q = 2$: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$.
(5)

$$a_n := \frac{4n^2 + 2n + 1}{3n^3 + 6}.$$

(6) Durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{aligned}$$

wird eine Folge rekursiv definiert: $2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots$.

Definition Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen den *Grenzwert* a (in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ (für $n \to \infty$)), wenn gilt:
Zu jeder beliebig kleinen vorgegebenen Schranke $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Anschaulich: Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn in jedem noch so kleinen Intervall mit Mittelpunkt a (ε-Umgebung von a) ab einem genügend großen Index n_0 schließlich alle Folgenglieder a_n ($n \geq n_0$) liegen. Hierbei nennt man das Intervall

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

eine *ε-Umgebung* von a.
Es gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen. *Fast alle* bedeutet hierbei *alle bis auf endlich viele.*
Es gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn in jedem Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (für beliebig kleines $\varepsilon > 0$) unendlich viele, außerhalb aber höchstens endlich viele Glieder der Folge liegen.

Definition Eine Folge heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls *divergent*. Jede gegen 0 konvergierende Folge heißt *Nullfolge*.

Definition Man sagt, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *divergiert gegen den uneigentlichen Grenzwert* ∞ (oder *strebt gegen* ∞) (in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$ (für $n \to \infty$)), wenn die Folgenglieder a_n in positiver Richtung über alle Schranken wachsen, d.h. wenn es zu jedem noch so großen K einen Index n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$a_n > K.$$

Analog ist $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$ (für $n \to \infty$) definiert.

Definition Eine *Folge komplexer Zahlen* ist eine auf $\mathbb{N}$ erklärte komplexwertige Funktion

$$n \in \mathbb{N} \mapsto c_n \in \mathbb{C}.$$

Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn die beiden Folgen $(\mathrm{Re}(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(c_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(c_n).$$

Wir untersuchen nun die Beispiele auf Konvergenz bzw. Divergenz.

Beispiel 3.2.1

(1)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty} (a_0 + nd) = \begin{cases} \infty & \text{für } d > 0, \\ a_0 & \text{für } d = 0, \\ -\infty & \text{für } d < 0. \end{cases}$$

(4) Es sei $a_0 > 0$.
$$\lim_{n\to\infty} a_0 q^n = \begin{cases} \infty & \text{für } q > 1, \\ a_0 & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{für } |q| < 1. \end{cases}$$
Die Folge $(a_0 q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $q \leq -1$ divergent.

Bevor wir die anderen Beispiele untersuchen, notieren wir einige einfache Sätze und Rechenregeln.

Satz 3.2.1 (Eindeutigkeit des Grenzwertes) *Gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$*, so gilt* $a = b$.

Satz 3.2.2 (Rechenregeln für Grenzwerte) *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *ist, so gilt*

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Wenn $b \neq 0$, *dann gibt es ein* $n_1 \in \mathbb{N}$ *mit* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_1$ *und*

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

Beispiel 3.2.1(5):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 2n + 1}{3n^3 + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{6}{n^3}} = 0.$$

Satz 3.2.3 *Es sei* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $a_n \leq b_n$ *für fast alle* n. *Dann gilt* $a \leq b$.

Satz 3.2.4 (Einzwängungssatz) *Für fast alle* n *gelte*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$, *so gilt auch* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Definition Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *nach oben beschränkt*, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *nach unten beschränkt*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $m \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *beschränkt*, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Satz 3.2.5 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Warnung Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, siehe Beispiel 3.2.1 (4) $q = -1$.

Satz 3.2.6 (Ein Konvergenzkriterium) *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.*

Beispiel 3.2.2 Jeder Dezimalbruch, z.B.

$$0,\bar{9} = 0,99999999999999999999\ldots,$$

stellt eine reelle Zahl dar: Die Folge[1]

$$0; 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999; \ldots$$

ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, konvergiert also nach Satz 3.2.6. Der Dezimalbruch bezeichnet gerade den Grenzwert dieser Folge. In unserem Beispiel ist das die Zahl 1. Also stellt der unendliche periodische Dezimalbruch $0,\bar{9}$ die Zahl 1 dar.

Beispiel 3.2.1 (6): Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Somit ist $\sqrt{2}$ eine untere Schranke der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
& a_n \geq \sqrt{2} \\
\Rightarrow\ & a_n^2 \geq 2 \\
\Rightarrow\ & \frac{2}{a_n} \leq a_n \\
\Rightarrow\ & a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq a_n
\end{aligned}$$

Also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent nach Satz 3.2.6. Es sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir berechnen a.

Es gilt $a_n \geq \sqrt{2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also folgt aus Satz 3.2.3 $a > 0$. Nach Satz 3.2.2 gilt somit

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

Daraus folgt aber $a = \sqrt{2}$. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Damit haben wir ein Iterationsverfahren gefunden, $\sqrt{2}$ approximativ zu berechnen.

[1] Wir haben hier zur Deutlichkeit die Kommas zwischen den Folgengliedern durch Strichpunkte ersetzt.

Reihen

Wenn man eine Folge gegeben hat, so kann man auch versuchen, eine "Summe"

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

zu bilden. Wir wollen nun erklären, was wir darunter verstehen wollen. Zunächst kann man die "Partialsummen"

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

betrachten. Konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so kann man den Grenzwert als die "unendliche Summe"

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

betrachten.

Definition Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Durch

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (\textit{Partialsumme})$$

wird eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert, die *Reihe* genannt wird und mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (bzw. mit $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$) bezeichnet wird.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Man sagt auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert.* Den Grenzwert nennt man auch die *Summe* oder den *Wert* der Reihe.

Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedeutet also

(a) die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

(b) im Falle der Konvergenz den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Beispiel 3.2.3 (1) Das wichtigste Beispiel einer Reihe ist die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

für $q \in \mathbb{R}$. Die Partialsumme ist

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n.$$

Für $q = 1$ erhält man

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1} = n + 1.$$

Für $q = 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ daher nicht.

Es sei $q \neq 1$. Zieht man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ qs_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

voneinander ab, so erhält man

$$(1-q)s_n = 1 - q^{n+1}.$$

Für $q \neq 1$ gilt also

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Wir sehen also, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Nach Beispiel 3.2.1(4) konvergiert die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, und es gilt für $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Also folgt für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Wir erhalten also die sehr wichtige *Summenformel für die geometrische Reihe*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1}$$

Insbesondere gilt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

(2) Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

hat die Glieder $a_k = \frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} + \cdots \\ &= \infty. \end{aligned}$$

(3) Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Schreibe

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Warnung Notwendig für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist, dass die Glieder eine Nullfolge bilden. Das ist aber im Allgemeinen nicht hinreichend, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Definition Reihen, bei denen aufeinanderfolgende Glieder jeweils entgegengesetzte Vorzeichen haben, nennt man *alternierende Reihen.*

Satz 3.2.7 (Leibniz-Kriterium) *Es sei*

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$$

und es gelte

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots .$$

Beispiel 3.2.4 Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium.

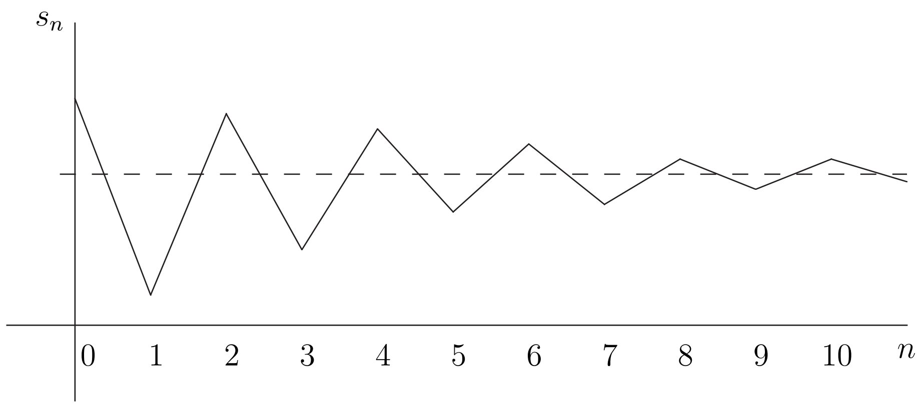


Abbildung 3.2: Partialsummen einer alternierenden Reihe

Man leitet leicht die folgenden Rechenregeln für Werte von Reihen ab.

Satz 3.2.8 (Rechenregeln für Summen von Reihen) (1) *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergent, so ist auch* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ *konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

(2) *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent und* $c \in \mathbb{R}$, *so ist auch* $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k$ *konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Warnung Eine Summe von endlich vielen Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge. Bei einer Reihe kann jedoch das Umordnen der Glieder zu seltsamen Resultaten führen: Wir betrachten wieder die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}.$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert diese Reihe gegen eine Zahl s. Wir ordnen nun die Reihe um:

$$\begin{aligned}
s &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\
&\ \text{(auf ein positives Glied folgen stets zwei negative Glieder)} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}s.
\end{aligned}$$

Solche Einschränkungen gelten nicht für absolut konvergente Reihen.

Definition Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots$ konvergiert.

Satz 3.2.9 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent (im gewöhnlichen Sinne).*

Warnung Die Umkehrung ist falsch, wie das Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ zeigt.

Satz 3.2.10 (Majorantenkriterium) *Gegeben seien zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Besteht für die Glieder die Abschätzung $0 \le |a_k| \le b_k$ für alle $k \ge k_0$ ($\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist* Majorante *von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$), dann gilt:*

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergent* $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$.

Beispiel 3.2.5 Wir beweisen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

mit Hilfe des Majorantenkriteriums.

Für alle $k \ge 1$ gilt

$$\frac{1}{k^2} \le \frac{2}{k(k+1)} \left(\Leftrightarrow k(k+1) \le 2k^2\right).$$

Nach Beispiel 3.2.3 (3) konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, also nach den Rechenregeln für Summen von Reihen auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$. Diese Reihe ist daher Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Satz 3.2.11 (Quotientenkriterium) *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = r,$$

so gilt:

(a) $r < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(b) $r > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Warnung Ist $r = 1$, so kann man keine Aussage machen.

Beispiel 3.2.6 Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \left| \frac{x^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot x^k} \right| = \left| \frac{x}{k+1} \right| \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Satz 3.2.12 (Wurzelkriterium) *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r,$$

so gilt:

(a) $r < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(b) $r > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Beispiel 3.2.7 Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \cdots$$

konvergiert absolut:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \frac{1}{k} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Nur für absolut konvergente Reihen gelten die beiden folgenden Sätze.

Satz 3.2.13 (Cauchy-Produkt zweier Reihen) *Für absolut konvergente Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *gilt die Produktformel*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}\right) \\ &= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \cdots .\end{aligned}$$

Satz 3.2.14 (Umordnungssatz) *Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent und* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$*, dann konvergiert jede aus* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *durch Umordnung der Glieder entstandene Reihe ebenfalls gegen* s*.*

3.3 Grenzwerte von Funktionen

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Wir interessieren uns nun für das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$, wenn sich x der Stelle $x = a$ nähert.

Definition Die Funktion $f(x)$ hat für x gegen a den *rechtsseitigen Grenzwert* (bzw. *linksseitigen Grenzwert*) c, in Zeichen

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = c \quad (\text{bzw. } \lim_{x\to a^-} f(x) = c),$$

wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus I mit $x_n \to a$ und $a < x_n$ für alle n (bzw. $x_n \to a$ und $x_n < a$ für alle n) die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.

Die Funktion $f(x)$ hat für x gegen a den *Grenzwert* c, in Zeichen

$$\lim_{x\to a} f(x) = c,$$

wenn gilt $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = c$.

Die Funktion $f(x)$ hat für x gegen ∞ (bzw. $-\infty$) den *Grenzwert* c, in Zeichen

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = c \quad (\text{bzw. } \lim_{x\to -\infty} f(x) = c),$$

wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus I mit $x_n \to \infty$ (bzw. $x_n \to -\infty$) die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert. Hierbei ist auch $c \in \{-\infty, \infty\}$ zugelassen.

Notation Andere übliche Notationen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = c \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \to c \text{ für } x \to a, \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = c \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \to c \text{ für } x \to a, a < x, \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = c \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \to c \text{ für } x \to a, x < a.\end{aligned}$$

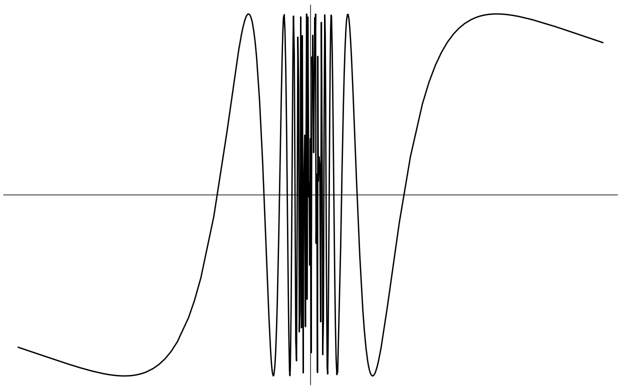


Abbildung 3.3: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

Beispiel 3.3.1 (1) Die *Größte-Ganze-Funktion*:
Zu $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Stellt man $x > 0$ in Dezimaldarstellung dar, so ist $[x]$ die Zahl, die man erhält, wenn man die Stellen hinter dem Komma abschneidet, z.B.

$$[15,8765] = 15.$$

Für jede ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{x \to m^-} [x] = m - 1, \qquad \lim_{x \to m^+} [x] = m.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} &= \infty, \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty, \\ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} &= 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ hat für $x \to 0$ weder einen linksseitigen noch einen rechtsseitigen Grenzwert. Dagegen gilt für $g(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$:

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

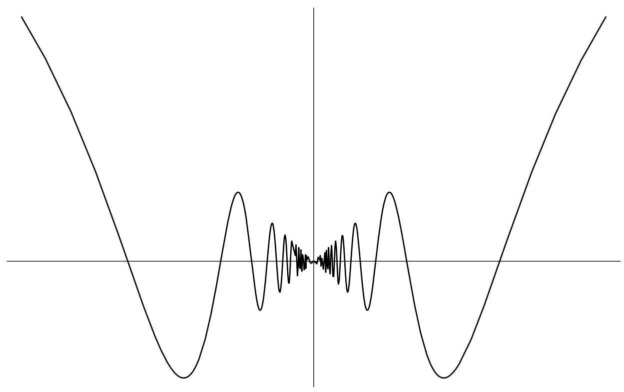


Abbildung 3.4: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Die Grenzwertregeln für Folgen lassen sich leicht auf Funktionsgrenzwerte übertragen:

Satz 3.3.1 (Grenzwertregeln) *Es seien*

$$c, d \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \lim_{x \to a} g(x) = d.$$

Dann gilt:

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = c \pm d.$

(b) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = cd,$ *insbesondere* $\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda c \ (\lambda \in \mathbb{R}).$

(c) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{c}{d}$ *(falls* $d \neq 0$*).*

Diese Regeln gelten auch für $a \in \{-\infty, \infty\}$ *(aber nur für* $c, d \in \mathbb{R}$*!).*

Anwendungen

Wir betrachten zunächst ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0, n \geq 1).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} a_x x^n \\
&= \begin{cases} \infty & \text{falls } a_n > 0, \\ -\infty & \text{falls } a_n < 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} a_n x^n \\
&= \begin{cases} \infty & \text{falls } a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade} \\ & \text{oder } a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade}, \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir eine rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x), q(x) \text{ haben keinen gemeinsamen Teiler.}$$

Die Zahl α sei ein ℓ-facher Pol von f. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha^+} f(x) &= \lim_{x\to\alpha^+} \frac{p(x)}{(x-\alpha)^\ell q_1(x)} \\
&= \frac{p(\alpha)}{q_1(\alpha)} \lim_{x\to\alpha^+} \frac{1}{(x-\alpha)^\ell}, \\
\lim_{x\to\alpha^-} f(x) &= \frac{p(\alpha)}{q_1(\alpha)} \lim_{x\to\alpha^-} \frac{1}{(x-\alpha)^\ell}.
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \cdots + \frac{b_0}{b_m x^m}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \\
&= \begin{cases} \infty & \text{falls } n > m \text{ und } \frac{a_n}{b_m} > 0, \\ -\infty & \text{falls } n > m \text{ und } \frac{a_n}{b_m} < 0, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{falls } n < m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.3.2

$$f(x) = \frac{x^3+2}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Die Funktion f hat einen einfachen Pol bei $x = -1$ und einen doppelten Pol bei $x = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(-1)^-} f(x) &= \frac{1}{4}\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x+1} = -\infty, \\
\lim_{x\to(-1)^+} f(x) &= \frac{1}{4}\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x+1} = \infty, \\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \frac{3}{2}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2} = \infty = \frac{3}{2}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} f(x), \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.
\end{aligned}$$

Die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ sind *vertikale Asymptoten*, die Gerade $y = 1$ eine *horizontale Asymptote* der Kurve $y = f(x)$.

3.4 Stetigkeit

Definition Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* x_0, falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. (Ist x_0 ein Randpunkt von I, so $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.)

Die Funktion f heißt *stetig auf* I, wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

Anschaulich: Graph ist zusammenhängende Linie (ohne Lücken und Sprünge).

Beispiel 3.4.1 (1) Die Größte-Ganze-Funktion $f(x) = [x]$ ist in allen offenen Intervallen $(m, m+1)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ stetig und in allen $m \in \mathbb{Z}$ unstetig.
(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig in allen Punkten $x \neq 0$ (in 0 nicht definiert).
(3) $f(x) = |x|$ ist überall stetig.

Definition Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *stetig fortsetzbar nach* x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

existiert und endlich ist. Durch die Festsetzung $f(x_0) := c$ wird f dann zu einer in x_0 stetigen Funktion fortgesetzt.

Beispiel 3.4.2 (4) $f(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$ ist stetig nach 1 fortsetzbar:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = n.$$

(5) $\frac{1}{x}$ und $\sin\frac{1}{x}$ sind nicht stetig nach 0 fortsetzbar, wohl aber $x\sin\frac{1}{x}$.

Aus den Grenzwertregeln (Satz 3.3.1) folgt:

Satz 3.4.1 (Rechenregeln für stetige Funktionen) (a) *Sind f, g auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ stetig, so auch $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ und fg. $\frac{f}{g}$ ist stetig in allen $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$.*

(b) *Sind $f : I \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subseteq I$ stetig, so auch $h : D \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(g(x))$ auf D.*

Satz 3.4.2 (a) *Jedes Polynom ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.*

(b) *Jede rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist in allen $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$ stetig.*

Satz 3.4.3 *Für jede auf einem* abgeschlossenen *Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f gilt:*
(a) **Schrankensatz** *f ist auf $[a, b]$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke K mit $|f(x)| < K$ für alle $x \in [a, b]$.*
(b) **Satz vom Maximum und Minimum** *f nimmt auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$.*
(c) **Zwischenwertsatz** *Jeder Wert zwischen dem Minimum und dem Maximum von f wird angenommen, d.h. ist m das Minimum und M das Maximum von f auf $[a, b]$, so gibt es für jedes c mit $m \leq c \leq M$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.*

Kapitel 4

Differentiation

4.1 Differenzierbarkeit

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$. Den Ausdruck

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für $x \in I$, $x \neq x_0$, $h := x - x_0$, nennt man *Differenzenquotient* von f an der Stelle x_0. Anschaulich gibt der Differenzenquotient die Steigung der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ an den Graphen von f an (siehe Abb. 4.1).

Definition f heißt *differenzierbar* in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw. } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert und endlich ist.

Ist f differenzierbar in x_0, so heißt

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

die *Ableitung* von f an der Stelle x_0.

f heißt *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall ist $f'(x)$ eine auf I definierte Funktion, die man mit f' bezeichnet und auch die *Ableitung* von f nennt.

Notation Andere Notationen für $f'(x)$:

$$f(x)', \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x).$$

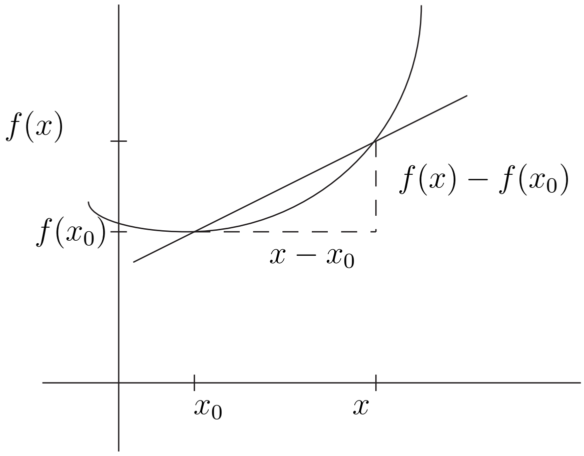


Abbildung 4.1: Steigung der Sekante von $(x_0, f(x_0))$ nach $(x, f(x))$

Notation von Leibniz:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

Geometrische Deutung

Anschaulich gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an. Die Gleichung der Tangente an den Graphen $y = f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ lautet also:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Analytische Deutung

Zu einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ wird diejenige Gerade (lineare Funktion) $g(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$ durch $(x_0, f(x_0))$ gesucht, die f in der Nähe von x_0 am besten approximiert, d.h. mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Einsetzen von $g(x)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - m(x-x_0) - f(x_0)}{x-x_0} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = m \\ \Leftrightarrow\ & f'(x_0) = m \end{aligned}$$

Also ist die *beste lineare Approximation* von f nahe x_0 die Funktion

$$f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Es gilt also

$$f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) + r(x-x_0) \text{ mit } \lim_{x\to x_0} \frac{r(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Physikalische Deutung

Betrachte die geradlinige Bewegung eines Massenpunktes. Es sei

$$\begin{aligned} x &= t \quad \text{Zeit} \\ f(x) &= s(t) \quad \text{zum Zeitpunkt } t \text{ zurückgelegte Strecke} \\ & \quad\ \text{(Ohne Einschränkung } s(0) = 0). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall (t_0, t) (oder (t, t_0)) und

$$v(t_0) = \dot{s}\,(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

die (momentane) Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

Beispiel 4.1.1 (1) $f(x) = ax + b$, $f'(x) = a$.
(2) $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

Wie verhalten sich Stetigkeit und Differenzierbarkeit zueinander?

Satz 4.1.1 *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, so ist f auch stetig in x_0.*

Warnung Die Umkehrung von Satz 4.1.1 gilt nicht! Z.B. ist $f(x) = |x|$ in 0 stetig, aber nicht differenzierbar.

4.2 Rechenregeln

Satz 4.2.1 (Differentiationsregeln) *Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{llcl} \text{(a)} & (f+g)'(x_0) & = & f'(x_0) + g'(x_0) \\ \text{(b)} & (\lambda f)'(x_0) & = & \lambda f'(x_0) \text{ für } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{(c)} & (f \cdot g)'(x_0) & = & f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ & & & \text{(Produktregel)} \\ \text{(d)} & \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) & = & \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \text{ falls } g(x_0) \neq 0 \\ & & & \text{(Quotientenregel)} \\ & \left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) & = & -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \text{ falls } g(x_0) \neq 0 \end{array}}$$

Beispiel 4.2.1 (1) Jedes Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

ist überall differenzierbar und es gilt

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdot + 2a_2 x + a_1.$$

(2) Jede rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist in ihrem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$ differenzierbar. Insbesondere

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}, x \neq 0).$$

Satz 4.2.2 (Kettenregel) *Es seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(D) \subseteq I$. Ist g differenzierbar in $x_0 \in D$, f differenzierbar in $g(x_0) \in I$, so ist $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt*

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(g(x_0)) = f'(g(x_0))g'(x_0)}$$

Merkregel: "Äußere Ableitung an der Stelle $g(x_0)$ mal innere Ableitung."

Beispiel 4.2.2 $h(x) = (x^2+4)^3$, $h'(x) = 3(x^2+4)^2 \cdot 2x$.

4.3 Umkehrfunktionen

Definition Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) heißt

(a) *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \le f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \ge f(x_2)$) gilt.

(b) *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ die strikte Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$) gilt.

Beispiel 4.3.1 $f(x) = x^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

Definition Es sei $D \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f ist *über D umkehrbar*, wenn zu jedem $y \in f(D)$ die Gleichung $y = f(x)$ genau eine Lösung $x \in D$ besitzt. In diesem Fall gibt es eine *Umkehrfunktion*

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & f(D) & \longrightarrow & D \\ & y \in f(D) & \longmapsto & \text{eindeutig bestimmte Zahl } x \in D \text{ mit } f(x) = y \end{array}$$

d.h.

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Besitzt f über D eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= y \quad \text{für alle } y \in f(D), \\ f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in D. \end{aligned}$$

Warnung f^{-1} ist nicht zu verwechseln mit $\frac{1}{f}$!

Beispiel 4.3.2 (a) Für $a \neq 0$ ist $f(x) = ax + b$ über ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar mit Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b), \quad y \in \mathbb{R}.$$

(b) $f(x) = x^2$ ist nicht über ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar, wohl aber über $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ mit $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ und über $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ mit $f^{-1} = -\sqrt{y}$.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ umkehrbar mit Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, so erhält man den Graphen von f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Geraden $y = x$. Denn bei dieser Spiegelung geht ein Punkt mit den Koordinaten (x, y) über in einen Punkt mit den Koordinaten (y, x), also aus $(x, f(x))$ wird $(f(x), x) = (y, f^{-1}(y))$.

Satz 4.3.1 *Jede streng monoton wachsende oder streng monoton fallende Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar.*

Satz 4.3.2 *Es sei f eine über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ umkehrbare und differenzierbare Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in allen $x_0 \in f(I)$ mit $f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$ differenzierbar und es gilt*

$$\boxed{(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}}$$

In der Notation von Leibniz:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

Beispiel 4.3.3 $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
1. Fall: n gerade.
Wegen$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$ ist f nicht über ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Auf $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ ist f streng monoton wachsend. Nach Satz 4.3.1 ist f auf $\mathbb{R}_+$ umkehrbar. Deshalb hat die Gleichung $y = x^n$ zu jedem $y \in f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$ genau eine Lösung, sie heißt *n-te Wurzel* von y, in Zeichen $x = \sqrt[n]{y}$. Die Umkehrfunktion von f ist die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

2. Fall: n ungerade.
Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Deshalb ist für ungerades n die n-te Wurzel für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt. Die Umkehrfunktion von f ist

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\boxed{y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x \text{ für } \begin{cases} x \geq 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x \in \mathbb{R} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}}$$

Allgemeiner setzt man für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x^{\frac{1}{n}} & := & \sqrt[n]{x}, \\ x^{\frac{m}{n}} & := & \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m. \end{array}}$$

Damit ist die *Potenzfunktion*

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad f(x) = x^\alpha$$

für jeden rationalen Exponenten $\alpha \in \mathbb{Q}$ erklärt. (Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen wird einheitlich der Definitionsbereich $D = (0, \infty)$ festgelegt.)

Beispiel 4.3.4 Für die Ableitung von $x = y^{\frac{1}{n}}$ gilt nach Satz 4.3.2:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Also folgt (Vertauschung von x und y)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \quad (x > 0).$$

Insgesamt erhalten wir für $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Formel:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0)}$$

4.4 Extremwerte und Mittelwertsatz

Wir betrachten zunächst

Höhere Ableitungen

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, eine differenzierbare Funktion. Die Ableitung der Ableitung f' von f bezeichnen wir, falls sie existiert, mit f''. Andere Bezeichnungen:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x).$$

Allgemeiner:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &:= f(x),\\
f^{(1)}(x) &:= f'(x),\\
f^{(2)}(x) &:= f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x),\\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots\\
f^{(n)}(x) &:= \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x).
\end{aligned}$$

Definition Man sagt, f ist *n-mal differenzierbar* (bzw. *stetig differenzierbar*), wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ existiert (bzw. existiert und stetig ist).

Warnung Eine differenzierbare Funktion braucht nicht notwendig auch zweimal differenzierbar zu sein. Gegenbeispiel: $f(x) = x|x|$, $f'(x) = 2|x|$.

Wir kommen nun zu der auch aus der Schule bekannten

Extremwertberechnung

Definition Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Man sagt, f hat in $x_0 \in D$ ein *globales* (oder *absolutes*) *Maximum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt.

Man sagt, f hat in $x_0 \in D$ ein *lokales* (oder *relatives*) *Maximum*, wenn es ein offenes Intervall I mit Mittelpunkt x_0 gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I \cap D$ gilt.

x_0 heißt globale oder lokale *Maximumstelle*, $f(x_0)$ das globale oder lokale *Maximum*.

Entsprechend sind globales oder lokales *Minimum*, globale oder lokale *Minimumstelle* definiert. Ein Maximum oder Minimum heißt auch ein *Extremum* (oder ein *Extremwert*).

Satz 4.4.1 (Lokales Extremwertkriterium) *Es sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

$$x_0 \in I \text{ lokale Extremstelle von } f \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Satz 4.4.1 liefert ein notwendiges Kriterium für eine lokale Extremstelle: $f'(x_0) = 0$.

Definition Ein *kritischer Punkt* einer differenzierbaren Funktion f ist eine Zahl x_0, so dass

$$f'(x_0) = 0.$$

Der Funktionswert $f(x_0)$ an einem kritischen Punkt x_0 heißt ein *kritischer Wert* von f.

Bei der Extremwertbestimmung geht man also wie folgt vor. Es sei f eine Funktion, die auf $[a, b]$ definiert und auf (a, b) differenzierbar ist. Um die Maxima und Minima von f zu finden, müssen zwei Arten von Punkten betrachtet werden:

(1) die kritischen Punkte von f auf (a, b),

(2) die Randpunkte a und b des Intervalls.

Beispiel 4.4.1 Wir betrachten die Aufgabe, die Extremwerte der Funktion

$$f(x) = x^3 - x \text{ auf dem Intervall } [-1, 2]$$

zu bestimmen. Es gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

die kritischen Punkte sind also $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Beide Punkte liegen in $(-1, 2)$, also haben wir als Kandidaten für mögliche Extremstellen

(1) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$,

(2) -1, 2.

Es gilt

$$f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},\ f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},\ f(-1) = 0,\ f(2) = 6.$$

Also nimmt f das Minimum $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ in $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und das Maximum 6 in 2 an.

Wir behandeln nun grundlegende Sätze über differenzierbare Funktionen.

Satz 4.4.2 (Mittelwertsatz) *Es sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$, so dass*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Anschaulich: Für mindestens ein $x_0 \in (a,b)$ ist die Tangente in x_0 parallel zur Sekante durch die Punkte $A = (a, f(a))$ und $B = (b, f(b))$.

Physikalische Deutung: Bei der durch $s(t)$ beschriebenen geradlinigen Bewegung wird zu mindestens einem Zeitpunkt t_0 im Zeitintervall $[a,b]$ die durchschnittliche Geschwindigkeit

$$\overline{v} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

tatsächlich erreicht: $v(t_0) = \dot{s}\,(t_0) = \overline{v}$.

Wir stellen nun Anwendungen des Mittelwertsatzes zur *Kurvendiskussion* zusammen.

Satz 4.4.3 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt*

(a) *$f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in I$*
$\Rightarrow$ f ist auf I streng monoton wachsend (bzw. fallend).

(b) *$f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$*
$\Leftrightarrow$ f ist auf I monoton wachsend (bzw. fallend).

(c) *$f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ $\Leftrightarrow$ f ist auf I konstant.*

Satz 4.4.4 (1. Extremwerttest) *Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$ ein Punkt mit $f'(x_0) = 0$. Außerdem gebe es ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ und*

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \qquad \text{für } x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ f'(x) &< 0 \qquad \text{für } x_0 < x < x_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Entsprechend ist der umgekehrte Vorzeichenwechsel von f' hinreichend für ein lokales Minimum.

Satz 4.4.5 (2. Extremwerttest) *Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt*

$$f''(x_0) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales } \begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$$

Satz 4.4.6 (Krümmungstest) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$f'' \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Die Kurve } y = f(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{konvex (Linkskrümmung)} \\ \text{konkav (Rechtskrümmung)} \end{cases}$$

Definition Ein *Wendepunkt* von f ist ein Punkt $x_0 \in I$, bei dem $y = f(x)$ von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung oder umgekehrt übergeht.

Satz 4.4.7 (Wendepunkttest)

$$f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f \text{ hat in } x_0 \text{ einen Wendepunkt.}$$

4.5 Elementare Funktionen

Wir wollen nun den Kreis der Funktionen, die wir bisher betrachtet haben, erweitern.

Die Exponentialfunktion

In §3.2 hatten wir gesehen, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Wir definieren nun

Definition (Exponentialfunktion)

$$\boxed{e^x := \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad (\textit{e-Funktion})}$$

Eigenschaften der e-Funktion

(1) *Positivität:* $e^0 = 1$, $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) *Funktionalgleichung der e-Funktion:*

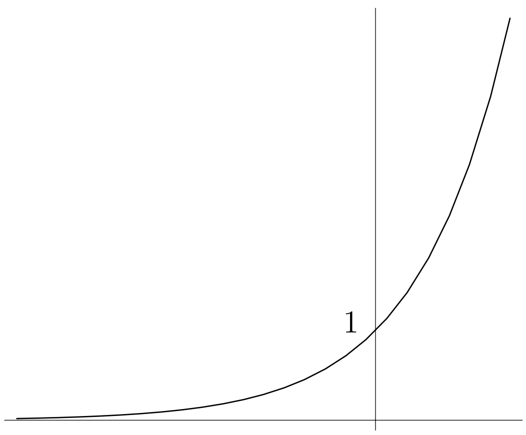
$$\boxed{\begin{array}{rcl} e^{x+y} & = & e^x e^y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \\ e^{-x} & = & \frac{1}{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{array}}$$

(3) *Ableitung:* Die e-Funktion ist überall differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad (x \in \mathbb{R})}$$

(4) *Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$$



Definition (Logarithmus) Die e-Funktion ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Umkehrfunktion ist der *natürliche Logarithmus*:

$$\boxed{\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.}$$

Eigenschaften von $\ln$

(1) $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $e^{\ln x} = x$ für alle $x > 0$.

(2) $\ln 1 = 0$,
$\ln x < 0$, falls $0 < x < 1$,
$\ln x > 0$, falls $x > 1$.

(3) *Funktionalgleichung der* $\ln$*-Funktion:*

$$\boxed{\ln xy = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad (x, y > 0)}$$

(4) *Ableitung:* Die ln-Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich $(0, \infty)$ differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{\ln' x = \frac{1}{x} \quad (x > 0)}$$

(4) *Verhalten für* $x \to \infty$ *und* $x \to 0$*:*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$$

Allgemeine Potenz

Es sei $a > 0$, $x = \ln a$. Es gilt für $r \in \mathbb{Q}$

$$(e^x)^r = e^{rx} \overset{x=\ln a}{\Rightarrow} a^r = e^{r \ln a}.$$

Deswegen definiert man

Definition (Allgemeine Potenz zur Basis a**)** Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\boxed{a^x := e^{x \ln a} \quad (a > 0)}$$

Die Funktion $f(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$ nennt man auch die *Exponentialfunktion zur Basis a*.

Eigenschaften von a^x $(x, y \in \mathbb{R}, a, b > 0)$

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$,
$(ab)^x = a^x b^x$,
$(a^x)^y = a^{xy}$

(2) $\ln(a^x) = x \ln a$.

(3) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$.

Damit ist nun auch die Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert. Es gilt

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1} \quad (x > 0)}$$

Allgemeiner Logarithmus

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ zu einer Basis $a > 0$ ist über $\mathbb{R}$ umkehrbar: Für $y \in f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gilt:

$$y = e^{x \ln a} \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Definition (Allgemeiner Logarithmus zur Basis a) Für $a > 0$ und $x \in (0, \infty)$ ist der *Logarithmus zur Basis a* definiert durch

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad x \in (0, \infty)}$$

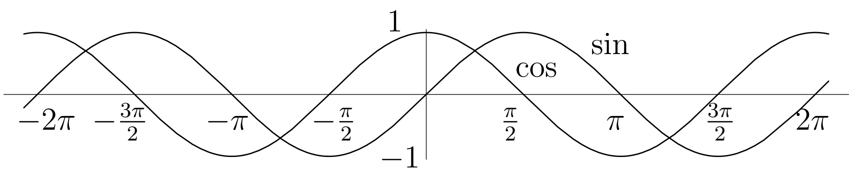
Rechenregeln

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(2) $\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$.

Kreisfunktionen

Die Funktionen sin und cos haben wir schon eingeführt.



Eigenschaften von sin **und** cos

(1) $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

(2) $\cos(-x) = \cos x$, cos ist *gerade*,
$\sin(-x) = -\sin x$, sin ist *ungerade*.

(3) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

(4) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$,
cos und sin sind *periodisch* von der Periode 2π.

(5) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(6) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$.

(7) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$.

(8) $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$,
$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

(9) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$,
$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$,
$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$,
$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

(10) $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$.

Definition (Tangens- und Cotangens)

$$\begin{aligned} \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.
cot	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

n.d. = nicht definiert

Eigenschaften von tan **und** cot

(1) $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$, tan und cot sind *ungerade.*

(2) $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$,
tan und cot sind *periodisch* von der Periode π.

(3)
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad x, y, x + y \in D.$$

(4)

$$\tan' x = \frac{1}{(\cos x)^2} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$
$$\cot' x = -\frac{1}{(\sin x)^2} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

Arcusfunktionen

Wir betrachten nun die Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen. Sie sind nicht global umkehrbar, aber über gewissen Teilintervallen, auf denen sie streng monoton sind.

Definition (Arcussinus) Die Funktion sin ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend. Umkehrfunktion:

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ und } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Der Graph ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Ableitung:

$$\boxed{\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } -1 < x < 1.}$$

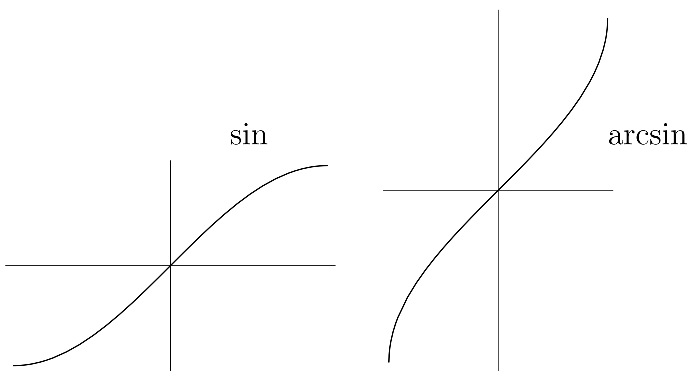


Abbildung 4.2: Die Funktionen sin und arcsin

Definition (Arcuscosinus) Die Funktion cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend. Umkehrfunktion:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$y = \arccos x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ und } 0 \leq y \leq \pi.$$

Der Graph ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Ableitung:

$$\boxed{\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } -1 < x < 1.}$$

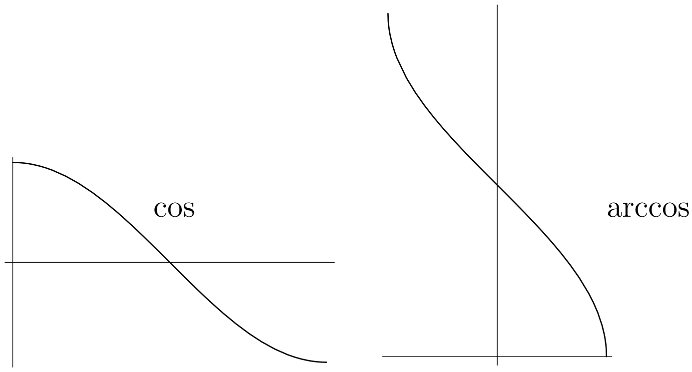


Abbildung 4.3: Die Funktionen cos und arccos

Definition (Arcustangens) Die Funktion tan ist auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend. Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} \arctan \ : \ & \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ & y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \text{ und } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Der Graph ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Ableitung:

$$\boxed{\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.}$$

Definition (Arcuscotangens) Die Funktion cot ist auf dem Intervall $(0, \pi)$ streng monoton fallend. Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} \ : \ & \mathbb{R} \to (0, \pi) \\ & y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x \text{ und } 0 < y < \pi. \end{aligned}$$

Der Graph ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Ableitung:

$$\boxed{\operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.}$$

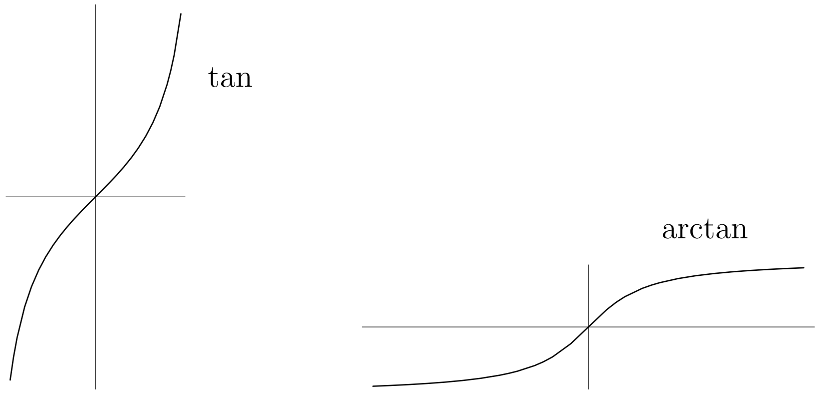


Abbildung 4.4: Die Funktionen tan und arctan

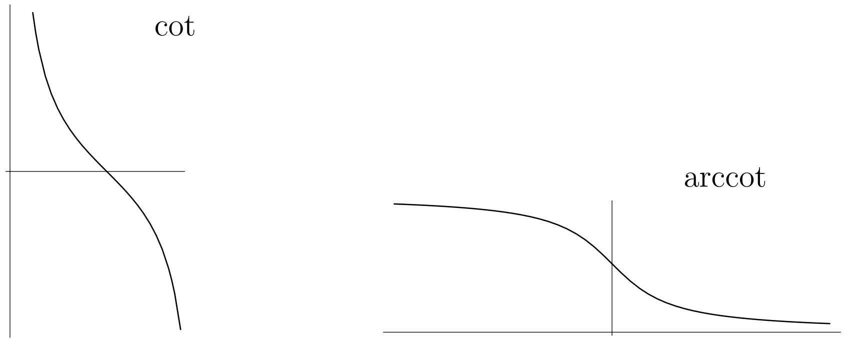


Abbildung 4.5: Die Funktionen cot und arccot

Hyperbelfunktionen

Definition Für alle $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && (\text{"sinus hyperbolicus"}) \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && (\text{"cosinus hyperbolicus"}) \end{aligned}}$$

Bemerkung 4.5.1 Aus der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ folgt

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \end{aligned}$$

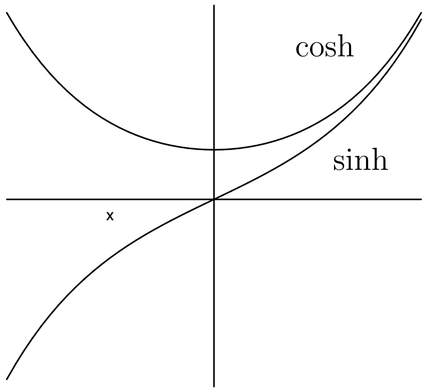


Abbildung 4.6: Die Hyperbelfunktionen sinh und cosh

Rechenregeln

(1) $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$.

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

(3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
($(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ liegt auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, daher der Zusatz "hyperbolicus".)

(4) $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh' x = \sinh x$.

Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{(area sinus hyperbolicus)} \\ & \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} \ : \ & [1, \infty) \to [0, \infty) \quad \text{(area cosinus hyperbolicus)} \\ & \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad 1 \le x < \infty. \end{aligned}$$

4.6 Die Regel von de L'Hospital

Wir geben nun eine wichtige Regel zur Grenzwertbestimmung an.

Satz 4.6.1 (Regel von de L'Hospital) *Es seien* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar,* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*. Es gelte*

(a) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ *oder* $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ *für* $x \to b^-$.

(b) $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert (*∞, $-\infty$ *zugelassen).*

Dann gilt

$$\boxed{\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Entsprechend für $x \to a^+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

Kurzgefasst: Ist

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ von der Form } \frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{\infty}{\infty},$$

so ist

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ falls der letzte Grenzwert existiert.}$$

Ist der letzte Grenzwert wieder von der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so ist die Regel erneut anzuwenden.

Beispiel 4.6.1

$$(1) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

$$(2) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} 2\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$(3) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

4.7 Nullstellen und Fixpunkte

In vielen Fällen ist es nötig, die Nullstellen einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu bestimmen. Dies ist oft nur näherungsweise möglich, d.h. man bestimmt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, die gegen eine Nullstelle konvergiert. Die Nullstellenbestimmung kann man auch als Fixpunktproblem interpretieren:

Definition Eine Zahl $x^* \in [a, b]$ heißt *Fixpunkt* von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn $f(x^*) = x^*$ gilt.

Jede Nullstelle x^* von f ist Fixpunkt der Funktion

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) + x,$$

denn es gilt

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow g(x^*) = f(x^*) + x^* = x^*.$$

Jeder Fixpunkt x^* von f ist Nullstelle der Funktion

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - x,$$

denn es gilt

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow h(x^*) = f(x^*) - x^* = 0.$$

Satz 4.7.1 (Fixpunktsatz) *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $a \le f(x) \le b$ *für alle* $x \in [a, b]$.

(b) *Es gibt eine Konstante* $0 \le K < 1$ *mit* $|f'(x)| \le K$ *für alle* $x \in [a, b]$.

Dann gilt:
1. Existenz. *Es gibt genau einen Fixpunkt $x^* \in [a, b]$, d.h. genau ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = x^*$.*
2. Berechnung. *Es sei $x_0 \in [a, b]$ ein beliebiger Startwert. Dann konvergiert die rekursiv definierte Folge*

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gegen den Fixpunkt x^*.
3. Fehlerabschätzung. *Es gilt*

$$|x_n - x^*| \le \frac{K}{1 - K}|x_n - x_{n-1}| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

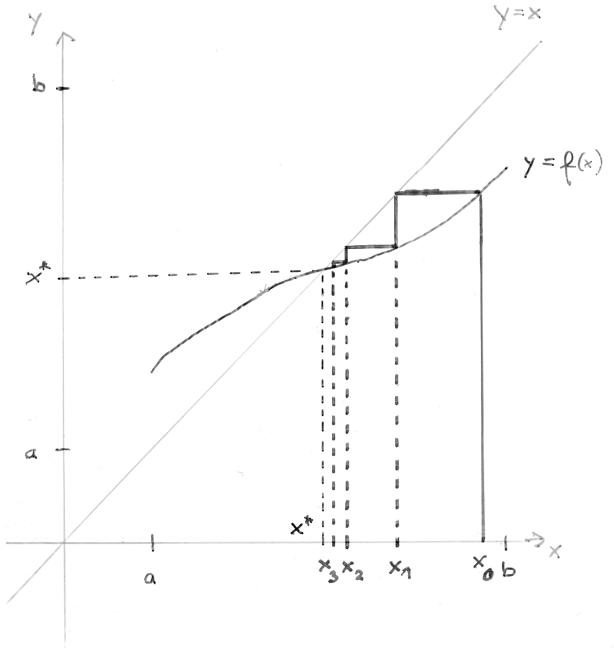


Abbildung 4.7: Fixpunkt-Iteration

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, $f(x^*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$. Wir betrachten einen Punkt x_0 nahe x^*. Die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Sie schneidet die x-Achse im Punkt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Wenn x_0 nahe genug an x^* gewählt ist, so liegt der Punkt x_1 näher an der Nullstelle als x_0 (siehe Abbildung 4.8). Darauf basiert das *Newton-Verfahren*:

Satz 4.7.2 (Newton-Verfahren) *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Dann gibt es ein Intervall $I \subseteq [a, b]$ mit $x^* \in I$, für das gilt:*

1. Berechnung. *Für einen beliebigen Startwert $x_0 \in I$ konvergiert die rekursiv definierte Folge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

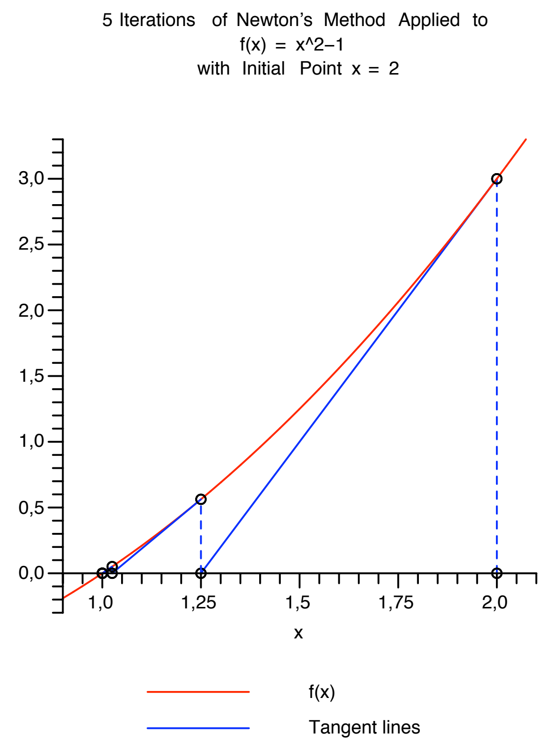


Abbildung 4.8: Das Newton-Verfahren (Beispiel mit Maple)

gegen die Nullstelle x^* *von* f.

2. Fehlerabschätzung. *Es liegt* quadratische Konvergenz *vor, d.h. es gilt*

$$|x_{n+1} - x^*| \le M|x_n - x^*|^2 \textit{ für } M := \frac{\text{Max von } |f''(x)| \text{ auf } I}{\text{Min von } |f'(x)| \text{ auf } I}.$$

Kapitel 5

Integration

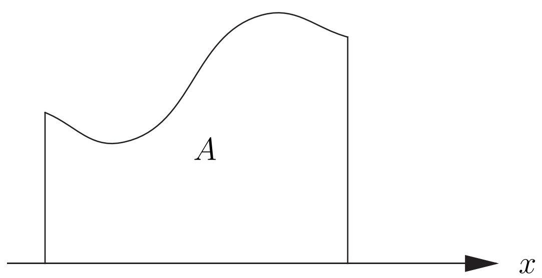
5.1 Das bestimmte Integral

Wir wollen nun den Integralbegriff einführen. Zweck des Integrals ist es, Flächen auszumessen.

Wir gehen aus von einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$. Wir nehmen für den Moment $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ an. Es interessiert uns die Fläche

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

unter dem Graphen von f:



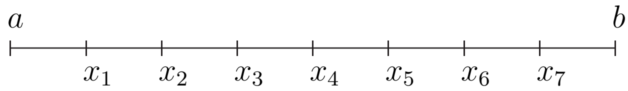
Welchen Inhalt hat diese Fläche? Man kann versuchen, den Flächeninhalt zu bestimmen, indem man A durch Rechtecke approximiert.

Wir nehmen an, dass f auf $[a, b]$ beschränkt und stetig bis auf höchstens endlich viele Stellen ist (f ist *stückweise stetig*).

Wähle $n - 1$ Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

von $[a,b]$. Eine solche endliche Folge von Teilpunkten nennt man eine *Einteilung* E_n von $[a,b]$. Dadurch wird $[a,b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ zerlegt.



Die maximale Intervalllänge dieser Teilintervalle

$$\varphi(E_n) := \max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$$

nennt man den *Feinheitsgrad* der Einteilung E_n.

In $[x_{i-1}, x_i]$ wähle *Zwischenpunkt* ξ_i mit $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. Die Zahl

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nennt man eine zur Einteilung E_n gehörige *Zwischensumme* oder *Riemannsche Summe* von f.

Anschaulich: Z_n ist eine Summe von Rechteckflächen, die den Flächeninhalt von A approximiert. Je feiner die Einteilung ist, desto genauer ist die Approximation.

Die Riemannsche Summe hängt also von der Einteilung E_n und der Wahl der Zwischenpunkte ξ_i ab.

Spezialfälle, wenn f stetig ist:

(a) *Riemannsche Untersumme* von f zur Einteilung E_n:

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

wobei $m_i :=$ Minimum von f auf $[x_{i-1}, x_i]$ (wird wegen der Stetigkeit von f an einer Stelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ angenommen).

(b) *Riemannsche Obersumme* von f zur Einteilung E_n:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

wobei $M_i :=$ Maximum von f auf $[x_{i-1}, x_i]$.

Satz 5.1.1 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stückweise stetige Funktion und $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Einteilungen von $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = 0$. Z_n sei eine Riemannsche Summe zu E_n.*

Dann existiert $\lim_{n\to\infty} Z_n$ und ist unabhängig von der Wahl der Teilpunkte und Zwischenpunkte.

Definition (Bestimmtes Integral) *Bestimmtes Integral von f über $[a,b]$:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$$

Es sei nun $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist der Flächeninhalt $I(A)$ der Fläche A unter dem Graphen von f:

$$I(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

Gilt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt für den entsprechenden Flächeninhalt oberhalb des Graphen

$$I(A) = \int_a^b (-f)(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Begrenzt der Graph von f Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse, so ist $\int_a^b f(x)dx$ die Summe der mit einem Vorzeichen versehenen Flächeninhalte.

Wir treffen noch folgende

Vereinbarung

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x)dx &:= 0, \\ \int_b^a f(x)dx &:= -\int_a^b f(x)dx \quad (a < b). \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.1

$$(1) \qquad \int_a^b c dx = c(b-a).$$

$$(2) \qquad \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}(b-a).$$

Elementare Integrationsregeln

($f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig)

(1) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

(2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ($a \leq c \leq b$).

(3) $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

(4) $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

(5) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Satz 5.1.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sind die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Spezialfall: $g(x) = 1$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \text{ mit geeignetem } \xi \in [a, b].$$

5.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition Es sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Satz 5.2.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $a, b \in I$. Dann gilt*

(a) *Die durch*

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)dt \quad \text{für } x \in I$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)}$$

Jede andere Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(b) *Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Notation

$$F(x)\Big|_a^b := [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Definition Eine Stammfunktion F von f nennt man auch *unbestimmtes Integral* und schreibt dafür

$$\int f(x)dx.$$

Mit dem Hauptsatz haben wir nun ein Mittel in der Hand, um ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$ bequem zu berechnen:

Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$

1. Schritt: Stammfunktion F von f ermitteln (Probe: $F' = f$).
2. Schritt: Berechne $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Aus jeder Ableitungsformel $F' = f$ ergibt sich eine entspechende Aussage über unbestimmte Integrale.

Beispiel 5.2.1

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{|b|}{|a|} \quad (0 \notin [a,b]),$$

insbesondere

$$\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0) \quad (\textit{Integraldarstellung}\text{ von } \ln)}$$

5.3 Integrationsregeln

Aufgrund des Hauptsatzes lassen sich die drei Differentiationsregeln Linearität, Produktregel und Kettenregel zu Regeln zur Berechnung unbestimmter Integrale übertragen.

1) Linearität

$$\boxed{\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})}$$

2) Partielle Integration

Es sei I ein Intervall, $u, v : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Die Produktregel besagt:

$$\begin{aligned} &(uv)' = u'v + uv' \\ &\quad \Rightarrow \quad uv \text{ ist Stammfunktion von } u'v + uv' \\ &\quad \Rightarrow \quad uv = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx}$$

oder

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Beispiel 5.3.1 (1)

$$\int \underbrace{x}_{v(x)} \underbrace{e^x}_{u'(x)} dx \;=\; xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c.$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{v(x)} \underbrace{\sin x}_{u'(x)} dx &= -x^2 \cos x + 2 \int \underbrace{x}_{v(x)} \underbrace{\cos x}_{u'(x)} dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c. \end{aligned}$$

(3)

$$\int \ln x dx \;=\; \int \underbrace{\ln x}_{v(x)} \underbrace{1}_{u'(x)} dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos x}_{v(x)} \underbrace{\cos x}_{u'(x)} dx \\
&= [\cos x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x) \sin x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.
\end{aligned}$$

Was haben wir damit gewonnen? Auflösen nach dem gesuchten Integral liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

3) Substitutionsregel

Die Kettenregel besagt

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) g'(x).$$

Mit $F' = f$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
\int f(g(x)) g'(x) dx &= F(g(x)) + c \\
\Rightarrow \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx &= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.
\end{aligned}$$

Damit erhält man die Substitutionsregel

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt}$$

Es gibt zwei Versionen der Anwendung dieser Regel:

1. Version: Berechnung von $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$

1. Schritt: Substitution $g(x) = t$, $g'(x) dx = dt$.
2. Schritt: Berechnung des Integrals $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$.

Beispiel 5.3.2

(1) $\displaystyle\int_a^b \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ Substitution: $\ln x = t, \frac{1}{x}dx = dt$

$$= \int_{\ln a}^{\ln b} t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_{\ln a}^{\ln b} = \frac{1}{3}(\ln b)^3 - \frac{1}{3}(\ln a)^3.$$

(2) $\displaystyle\int_a^b (px+q)^n dx$ Substitution: $px + q = t, pdx = dt$

$$= \frac{1}{p}\int_{pa+q}^{pb+q} t^n dt = \frac{1}{p}\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_{pa+q}^{pb+q}.$$

(3) $\displaystyle\int_a^b \sin(kx+\varphi)dx$ Substitution: $kx + \varphi = t, dx = \frac{1}{k}dt (k \neq 0)$

$$= \frac{1}{k}\int_{ka+\varphi}^{kb+\varphi} \sin t dt = -\frac{1}{k}\cos t\Big|_{ka+\varphi}^{kb+\varphi}.$$

Für jede ganze Zahl $k \neq 0$ folgt daraus

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx+\varphi)dx = 0.$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = -\pi$ erhalten wir damit

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

Daraus leitet man die *Orthogonalitätsrelationen* von sin und cos ab: Für ganze Zahlen $m, n \geq 0$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n = 0, \\ 0 & \text{falls } m \neq n, \\ \pi & \text{falls } m = n \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = n = 0, \\ 0 & \text{falls } m \neq n, \\ \pi & \text{falls } m = n \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$$

2. Version: Berechnung von $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

1. Schritt: Umbenennung $x = t$, $dx = dt$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$.
2. Schritt: Substitution $t = g(x)$, $dt = g'(x)dx$ mit einer geeigneten *umkehrbaren* Funktion g.
3. Schritt: Berechnung des Integrals $\int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))g'(x)dx$.

Beispiel 5.3.3

$$
\begin{aligned}
(1) \quad \int_\alpha^\beta \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx &= \int_\alpha^\beta \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt \quad (\text{Substitution: } t = \ln x, dt = \frac{1}{x}dx) \\
&= \int_{e^\alpha}^{e^\beta} \frac{x}{x^2+1}\frac{1}{x}dx = \int_{e^\alpha}^{e^\beta} \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x|_{e^\alpha}^{e^\beta}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \qquad (\text{Fläche eines Viertelkreises mit Radius 1}) \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt \quad \text{Substitution: } t = \sin x, dt = \cos x dx \\
&= \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} \; (\text{Substitution: } t = \tan x, dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx) \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^2} = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx \\
&= \frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

5.4 Uneigentliche Integrale

Wir wollen den Integralbegriff erweitern auf

(a) Integranden, die in der Umgebung eines Punktes nicht beschränkt sind,

(b) unbeschränkte Integrationsintervalle.

Definition Es sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &:= \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx \quad \text{falls } b \in \mathbb{R}, \\ \int_a^\infty f(x)dx &:= \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Diese Integrale nennt man *uneigentlich*. Entsprechend definieren wir für $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &:= \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx \quad \text{falls } a \in \mathbb{R}, \\ \int_{-\infty}^b f(x)dx &:= \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Man sagt, ein uneigentliches Integral *konvergiert* (bzw. *divergiert*), wenn der zugehörige Grenzwert existiert und endlich ist (bzw. nicht existiert oder ∞ ist).

Beispiel 5.4.1 (1)

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{dx}{x} = \lim_{c \to \infty} \ln c = \infty. \\ \int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \to 0^+} (-\ln c) = \infty. \end{aligned}$$

Beide uneigentlichen Integrale divergieren.

(2) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c \to \infty} \left[-\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^c \\ &= \lim_{c \to \infty} \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{c^{\alpha-1}} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1 \text{ (konvergiert)}, \\ \infty, & \text{falls } \alpha < 1 \text{ (divergiert)}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{c^{\alpha-1}} - 1 \right) \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha > 1 \text{ (divergiert)}, \\ -\frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha < 1 \text{ (konvergiert)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases} \\ \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha > 1 \\ -\frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}}$$

Man kann die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$ fest) als Vergleichsfunktion verwenden:

Satz 5.4.1 (Vergleichskriterium) *Es seien $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $g : (0, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha, K \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\text{(a)} \qquad |f(x)| \leq K\frac{1}{x^\alpha}, \quad a \leq x < \infty, \quad 1 < \alpha \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \textit{ konvergiert.}$$

$$\text{(b)} \qquad |g(x)| \leq K\frac{1}{x^\alpha}, \quad 0 < x \leq b, \quad 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \int_0^b g(x)dx \textit{ konvergiert.}$$

Beispiel 5.4.2

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ ist eigentlich, da $\frac{\sin x}{x}$ durch den Wert 1 stetig nach 0 fortgesetzt werden kann. Mit partieller Integration folgt:

$$\int_1^c \frac{1}{x}\sin x dx = -\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^c - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Es gilt

$$\lim_{c\to\infty} -\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^c = \cos 1.$$

Das Integral $\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}dx$ konvergiert nach dem Vergleichskriterium. Also konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Nicht berechnen, nur verraten können wir:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Definition *Ein an beiden Grenzen uneigentliches Integral:*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &:= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b) \\ &= \lim_{u\to a^+}\int_u^c f(x)dx + \lim_{v\to b^-}\int_c^v f(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &:= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx \quad (-\infty < c < \infty)\\ &= \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{c} f(x)dx + \lim_{v\to\infty}\int_{c}^{v} f(x)dx\end{aligned}$$

Warnung Die Grenzwerte sind *unabhängig voneinander* zu bestimmen!

Beispiel 5.4.3 (1)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\\ &= 2\lim_{v\to\infty}\arctan v = \pi.\end{aligned}$$

(2) Die *Gamma-Funktion*:

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

(a) $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ ist uneigentlich für $0 < x < 1$. Es gilt

$$e^{-t}t^{x-1} \le t^{x-1} = \frac{1}{t^\alpha}, \quad \alpha := 1 - x < 1.$$

Damit folgt die Konvergenz aus dem Vergleichskriterium.
(b) $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ konvergiert ebenfalls nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2t^{x-1}} = \infty \Rightarrow \frac{t^{x-1}}{e^t} \le \frac{1}{t^2} \text{ für großes } t.$$

Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(Beweis: Partielle Integration) Es gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{c\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^c = 1.$$

Daraus folgt

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \ldots = n!\Gamma(1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

5.5 Partialbruchzerlegung

Eine wichtige Methode zur Bestimmung eines Integrals über eine rationale Funktion ist die Partialbruchzerlegung.

Wir betrachten eine rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit Polynomen $p(x), q(x)$ ohne gemeinsamen Teiler und $\operatorname{Grad} p(x) < \operatorname{Grad} q(x)$.

1. Schritt: *Produktdarstellung* von $q(x)$

$$q(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r} q_1(x)^{\ell_1}\cdots q_s(x)^{\ell_s},$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $q_i(x)$ quadratische Polynome mit Leitkoeffizient 1, $q_i(x) \neq q_j(x)$, $q_i(x)$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

2. Schritt: Der *Partialbruchansatz*

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} \quad = \quad & \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \\
& \cdots \\
& + \frac{A_{r1}}{x-\alpha_r} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{q_1(x)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{q_1(x)^2} + \ldots + \frac{B_{1\ell_1}x + C_{1\ell_1}}{q_1(x)^{\ell_1}} + \\
& \cdots \\
& + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{q_s(x)} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{q_s(x)^2} + \ldots + \frac{B_{s\ell_s}x + C_{s\ell_s}}{q_s(x)^{\ell_s}}
\end{aligned}$$

mit Unbekannten $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$.

3. Schritt: *Koeffizientenberechnung* (Einsetzmethode, Koeffizientenvergleich) Multipliziere Gleichung mit $q(x)$ und mache anschließend Koeffizientenvergleich oder setze spezielle Werte für x ein, um die Unbekannten $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ zu ermitteln.

Beispiel 5.5.1

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)}.$$

Partialbruchansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B}{x-2} \Bigg| \cdot (x-1)^3(x-2) \\
x^2+x+1 &= A_1(x-1)^2(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-2) \\
& \quad + B(x-1)^3.
\end{aligned}$$

Einsetzmethode:

$$\begin{aligned}
x = 1 &\;\Rightarrow\; 3 = -A_3 \\
x = 2 &\;\Rightarrow\; 7 = B \\
x = 3 &\;\Rightarrow\; 13 = 4A_1 + 2A_2 + A_3 + 8B \\
x = 0 &\;\Rightarrow\; 1 = -2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - B
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: Aus

$$\begin{aligned}
x^2 + x + 1 &= (A_1 + B)x^3 + (-4A_1 + A_2 - 3B)x^2 + \\
&\quad + (5A_1 - 3A_2 + A_3 + 3B)x + (-2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - B)
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
0 &= A_1 + B \\
1 &= -4A_1 + A_2 - 3B \\
1 &= 5A_1 - 3A_2 + A_3 + 3B \\
1 &= -2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - B
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$A_1 = -7, \quad A_2 = -6, \quad A_3 = -3, \quad B = 7,$$

also

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x-2)} = -\frac{7}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{7}{x-2}.$$

Die Integration einer rationalen Funktion $R(x)$ geschieht nun in folgenden Schritten:

1. Schritt: Polynomdivision

$$R(x) = g(x) + \frac{p(x)}{(q(x)},$$

$p(x), q(x)$ teilerfremd, $\operatorname{Grad} p(x) < \operatorname{Grad} q(x)$.

2. Schritt: Partialbruchzerlegung von $\frac{p(x)}{q(x)}$ (falls $p(x) \not\equiv 0$).

3. Schritt: Integration von $g(x)$ und der Partialbrüche mittels der folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-\alpha} &= \ln|x-\alpha| + c, \\
\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} &= -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c \quad (k > 1) \\
\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}dx &= \text{siehe Tabellen in [2].}
\end{aligned}$$

4. Schritt: Teilintegrale aufsummieren

Beispiel 5.5.2

$$R(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

1. Schritt: entfällt.
2. Schritt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \qquad \Big| \cdot (1-x^2) \\ \Leftrightarrow 1 &= A(1+x) + B(1-x) \\ \Leftrightarrow 1 &= (A-B)x + (A+B) \end{aligned}$$

Daraus folgt $A = B = \frac{1}{2}$, also

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}.$$

3. Schritt:

$$\int \frac{1}{x \pm 1} dx = \ln|x \pm 1| + c.$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-x} dx + \int \frac{1}{1+x} dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-1} dx\right) \\ &= \frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x-1|) + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c. \end{aligned}$$

Durch Substitution kann man einige Integraltypen auf das Integral über eine rationale Funktion zurückführen:

Beispiel 5.5.3 Es sei R eine rationale Funktion.

$$\begin{aligned} \int R(e^x) dx &= \int R(e^t) dt \\ & \quad \text{(Substitution } t = \ln x, \quad dt = \frac{1}{x} dx) \\ &= \int R(x) \cdot \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Z.B.

$$\begin{aligned}\int \frac{1+e^t}{1-e^t}dt &= \int \frac{1+x}{(1-x)x}dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2dx}{1-x}\\ &= \ln e^t - 2\ln|1-e^t| + c.\end{aligned}$$

Beispiel 5.5.4 Wir bezeichnen mit $R(x,y)$ eine rationale Funktion in den Variablen x und y. Der Ausdruck $R(x, f(x))$ bedeutet, das in $R(x,y)$ die Variable y durch $f(x)$ ersetzt wird. Ein Integral der Form

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{px+q}{rx+s)}}\right) dx \quad (ps - qr \neq 0)$$

wird durch die

$$\text{Substitution: } t = \sqrt[k]{\frac{px+q}{rx+s)}}, x = \frac{st^k - q}{p - rt^k}, dx = kt^{k-1}\frac{ps-qr}{(p-rt^k)^2}$$

zu einem Integral über eine rationale Funktion in t. Z.B.

$$\begin{aligned}&\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx \qquad (\text{Substitution: } t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt)\\ &= \int \frac{1-t}{t^2+t}2tdt = 2\int \frac{1-t}{1+t}dt = 2\left(\int(-1)dt + \int \frac{2}{t+1}dt\right)\\ &= 4\ln(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x} + c.\end{aligned}$$

Beispiel 5.5.5 Wir betrachten ein Integral der Form $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Wir wenden die Substitutionsregel in der 2. Version an: Wir benennen die Variablen um und betrachten das Integral

$$\int R(\sin t, \cos t)dt.$$

Wir machen die Substitution

$$t = 2\arctan x, \quad dt = \frac{2}{1+x^2}dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}t = 2\arctan x \quad &\Leftrightarrow \quad \tan\frac{t}{2} = x \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = x \Leftrightarrow \frac{1-\cos t}{1+\cos t} = x^2\\ &\Leftrightarrow \quad \cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1+x^2},\end{aligned}$$

also
$$\int R(\sin t, \cos t)dt = \int R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}dx.$$

Z.B.
$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{2}{1+x^2}dx = \int \frac{2}{1-x^2}dx = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{t}{2}}{1-\tan\frac{t}{2}}\right| + c$$

(vgl. Beispiel 5.5.2).

Beispiel 5.5.6

$$\int R(t, \sqrt{t^2+1})dt \qquad \text{Substitution: } t = \sinh x, dt = \cosh x dx$$
$$\sqrt{t^2+1} = \cosh x$$
$$\int R(t, \sqrt{t^2-1})dt \qquad \text{Substitution: } t = \cosh x, dt = \sinh x dx$$
$$\sqrt{t^2-1} = \sinh x$$

Durch diese Substitutionen werden die Integrale auf Integrale des in Beispiel 5.5.3 behandelten Typs zurückgeführt.

$$\int R(t, \sqrt{1-t^2})dt \qquad \text{Substitution: } t = \sin x, \sqrt{1-t^2} = \cos x, dt = \cos x dx$$

Durch diese Substitution erhalten wir ein Integral vom Typ wie in Beispiel 5.5.5.

Kapitel 6

Potenzreihen

6.1 Gleichmäßige Konvergenz

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion

$$f_n : I \to \mathbb{R}$$

gegeben; dann nennen wir die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in I erklärte *Funktionenfolge.*

Für festes $x \in I$ entsteht aus der Funktionenfolge (f_n) durch Einsetzen von x die Zahlenfolge $(f_n(x))$.

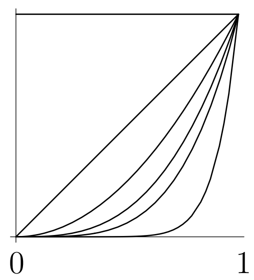
Definition (a) Die Funktionenfolge (f_n) heißt *punktweise konvergent* gegen die Grenzfunktion f, wenn für jedes $x \in I$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ gegen den Grenzwert $f(x)$ konvergiert.
(b) Die Funktionenfolge (f_n) heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion f, wenn sich zu jeder beliebig vorgegebenen kleinen Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein *für alle $x \in I$ gemeinsamer* Index N, der nur von ε abhängt, finden lässt, so dass gilt

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in I.$$

Anschaulich: Für $n \geq N$ liegen alle Graphen $y = f_n(x)$ im "ε-Schlauch" um den Graphen der Grenzfunktion $y = f(x)$.

Beispiel 6.1.1 Es sei $I = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$. Die Funktionenfolge (f_n) ist punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent gegen die Funktion f wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$



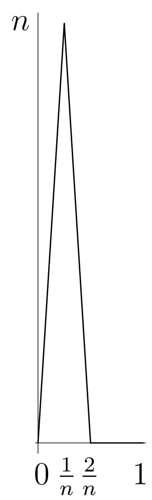
Satz 6.1.1 (Stetigkeit der Grenzfunktion) *Die Funktionenfolge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen f und alle f_n seien stetig auf dem Intervall I. Dann ist auch die Grenzfunktion f auf I stetig.*

Warnung Das obige Beispiel zeigt, dass die punktweise Konvergenz für die Stetigkeit der Grenzfunktion nicht ausreicht.

Satz 6.1.2 (Integration der Grenzfunktion) *Die Funktionenfolge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen f und alle f_n seien stetig auf dem Intervall I. Dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Warnung Satz 6.1.2 gilt nicht für punktweise Konvergenz: Für $n \geq 2$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch



$$f_n(x) := \max\left\{n - n^2 \cdot \left|x - \tfrac{1}{n}\right|, 0\right\}$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion auf $[0,1]$. Es gilt

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \text{ für alle } n \geq 2,$$

aber

$$\int_0^1 0\,dx = 0.$$

Satz 6.1.3 (Differentiation der Grenzfunktion) *Die Funktionenfolge (f_n) konvergiere punktweise gegen f, alle f_n seien stetig differenzierbar auf dem Intervall I und zusätzlich sei die Folge der Ableitungen (f_n') auf I gleichmäßig konvergent. Dann ist auch die Grenzfunktion f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Warnung Auch in Satz 6.1.3 sind alle Voraussetzungen wichtig!

Man kann nun auch Funktionenreihen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ betrachten.

Definition Eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt *gleichmäßig konvergent*, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n := f_0 + f_1 + \ldots + f_n$ gleichmäßig konvergent ist.

Die Sätze 6.1.1, 6.1.2 und 6.1.3 übertragen sich auf Funktionenreihen:

Satz 6.1.4 *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetiger Funktionen f_k auf I gleichmäßig gegen f, dann ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig.*

Satz 6.1.5 *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetiger Funktionen f_k auf I gleichmäßig gegen f, dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)dx\right).$$

Satz 6.1.6 *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig differenzierbarer Funktionen f_k auf I punktweise gegen f und ist die Reihe der Ableitungen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ auf I gleichmäßig konvergent, dann gilt*

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x).$$

Satz 6.1.7 (M-Test) *Gegeben seien Funktionen $f_k\colon I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Gilt für jede der Funktionen f_k ($k \in \mathbb{N}$) eine Abschätzung*

$$|f_k(x)| \leq M_k \text{ (konst.) für alle } x \in I$$

und konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf I gleichmäßig und absolut.

Beispiel 6.1.2 Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

konvergiert gleichmäßig (und absolut) auf $\mathbb{R}$, denn es gilt

$$\left|\frac{\cos kx}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent.}$$

6.2 Konvergenzradius

In §3.2 haben wir Reihen studiert. Wir wollen nun Potenzreihen betrachten.

Definition Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit $x \in \mathbb{R}$ (das als variabel aufgefasst wird) und $a_k \in \mathbb{R}$ (konstant). Die Zahlen a_k ($k \geq 0$) heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Eine Potenzreihe ist eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit $f_k(x) = a_k x^k$.

Beispiel 6.2.1 (1) Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots.$$

Koeffizienten: $a_k = 1$ ($k \geq 0$).
(2) Die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots.$$

Koeffizienten: $a_k = \frac{1}{k!}$ ($k \geq 0$).

Die wichtigste Frage ist zunächst, für welche x eine Potenzreihe konvergiert. Wir nehmen an, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x = x_1 \neq 0$ konvergiert. Dann bilden die Glieder eine Nullfolge, sind also insbesondere beschränkt. Es gibt also eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $k \geq 0$ gilt:

$$\left|a_k x_1^k\right| \leq C.$$

Es folgt dann für alle k

$$\left|a_k x^k\right| = |a_k||x_1|^k \left|\frac{x}{x_1}\right|^k \leq C \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$

Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_1|$. Dann setze

$$q := \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1.$$

Dann ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} C \cdot q^k$ eine konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$. Aus dem Majorantenkriterium folgt daher:

Satz 6.2.1 *Wenn die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x = x_1 \neq 0$ konvergiert, so konvergiert sie für jedes x mit $|x| < |x_1|$ sogar absolut.*

Definition Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $S \subseteq (-\infty, b]$. Ein solches b heißt *obere Schranke* von S.

$S \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $S \subseteq [a, \infty)$. Ein solches a heißt *untere Schranke* von S.

$S \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn S eine untere Schranke a und eine obere Schranke b besitzt, d.h. es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $S \subseteq [a, b]$.

Es sei $S \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Das *Supremum* von S, in Zeichen $\sup S$, ist die kleinste obere Schranke von S.

Warnung Das Supremum einer Menge S braucht nicht zu der Menge S zu gehören: z.B. $\sup[a, b) = b$. Aber zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in S$ mit $s - \varepsilon < x$. (Denn sonst $x \leq s - \varepsilon$ für alle $x \in S$ und $s - \varepsilon$ wäre kleinere obere Schranke.)

Beispiel 6.2.2 (1) $\sup[a, b] = b$, $\sup[a, b) = b$.
(2) $\sup\left\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = 1$.
(3) $\sup\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\} = \sqrt{2}$.

Es ist nicht selbstverständlich, dass es unter den oberen Schranken einer nach oben beschränkten Menge eine kleinste obere Schranke gibt. Z.B. hat die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$ in $\mathbb{Q}$ keine kleinste obere Schranke. Eine der Grundeigenschaften der reellen Zahlen ist:

Vollständigkeitsaxiom. Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Definition Es sei $S \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Das *Infimum* von S, in Zeichen $\inf S$, ist die größte untere Schranke von S.

Es gilt

$$\inf S = -\sup\{-x \mid x \in S\}.$$

Damit besitzt auch jede nicht leere nach unten beschränkte Menge $S \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum.

Beispiel 6.2.3 $\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = 0.$

Definition Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe. Setze

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert} \right\}.$$

Dann heißt die Zahl

$$R := \begin{cases} \sup\{|x| \mid x \in M\}, & \text{falls } M \text{ beschränkt}, \\ \infty, & \text{falls } M \text{ unbeschränkt}, \end{cases}$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Es gibt die drei Möglichkeiten

$$R = 0, \quad 0 < R < \infty, \quad R = \infty.$$

Beispiel 6.2.4 (1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ hat den Konvergenzradius $R = 0$: Sie konvergiert nur für $x = 0$, denn für $x \neq 0$ ist $k! x^k$ keine Nullfolge. Also ist $M = \{0\}$.

(2) Für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ gilt $M = \{x \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$, $R = 1$.

(3) Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert nach §3.2 für alle $x \in \mathbb{R}$, also $M = \mathbb{R}$, $R = \infty$.

Satz 6.2.2 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen) *Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit dem Konvergenzradius R gilt:*

(a) $R = 0 \Leftrightarrow$ *Die Reihe konvergiert nur für $x = 0$.*

(b) *Ist $R > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$, d.h. $x \in (-R, R)$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent. Auf jedem abgeschlossenen Intervall $[-\rho, \rho]$ $(0 < \rho < R)$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gleichmäßig.*

(c) *Für alle x mit $|x| > R$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergent.*

Aufgrund von Satz 6.2.2 gibt es für die Konvergenzmenge M für $R \neq 0, \infty$ die folgenden Möglichkeiten:

$$M = (-R, R), \quad M = [-R, R), \quad M = (-R, R], \quad M = [-R, R],$$

denn über $x = \pm R$ werden keine Aussagen gemacht. Man nennt M das *Konvergenzintervall* der Potenzreihe. In den Randpunkten $x = -R$ und $x = R$ ist sowohl Divergenz als auch Konvergenz möglich, dies ist von Fall zu Fall zu entscheiden.

Beispiel 6.2.5 (1) Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$: $M = (-1, 1)$, Divergenz an beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$: $M = (-1, 1]$. Die Reihe konvergiert für $x = 1$ nach dem Leibnizkriterium, aber nicht für $x = -1$ (harmonische Reihe).

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$: $M = [-1, 1]$.

Wie kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen? Z.B. mit dem folgenden Satz:

Satz 6.2.3 *Gilt $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ und $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ existiert oder ist ∞, dann gilt*

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|.$$

Beweis. Anwendung des Quotientenkriteriums:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|.$$

□

Untersuchung der Beispiele

(1) $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1.$

(2) $R = \lim_{k\to\infty} \left|-\frac{k+1}{k}\right| = 1.$

(3) $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^2}{k^2}\right| = 1.$

6.3 Reihenentwicklung der elementaren Funktionen

Wir wollen nun die Differentiation und Integration einer Potenzreihe betrachten. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ falls } |x| < R.$$

Man sagt, die Funktion f wird auf $(-R, R)$ *durch die Potenzreihe dargestellt.*

Satz 6.3.1 (Differentiation von Potenzreihen) *Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist im offenen Konvergenzintervall $(-R, R)$ $(R > 0)$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen erhält man durch gliedweises Differenzieren:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \ldots, \\ &\textit{etc.} \end{aligned}$$

Die abgeleiteten Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$, ... haben auch den Konvergenzradius R.

Beispiel 6.3.1 Geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1), \\ f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1), \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} = 2\frac{1}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

Satz 6.3.2 (Integration von Potenzreihen) *Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Für alle $a, b \in (-R, R)$ gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$$

(gliedweises Integrieren). Insbesondere ist (mit $a = 0$, $b = x$) die Funktion

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion von f auf dem Intervall $(-R, R)$, der Konvergenzradius dieser Reihe ist ebenfalls R.

Mit Hilfe der obigen Sätze können wir nun die Potenzreihendarstellung einiger Funktionen ermitteln.

Satz 6.3.3 (Reihenentwicklung einiger elementarer Funktionen)

$$\begin{array}{llcll}
\text{(a)} & e^x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, & x \in \mathbb{R}, \\
\text{(b)} & \sin x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots, & x \in \mathbb{R}, \\
\text{(c)} & \cos x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots, & x \in \mathbb{R}, \\
\text{(d)} & \ln(1+x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots, & |x| < 1, \\
\text{(e)} & \arctan x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots, & |x| < 1.
\end{array}$$

Beweis. (a) nach Definition.
(b), (c):

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots\right) \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

(d) Integration von $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$, $|x| < 1$.

(e) Integration von $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$, $|x| < 1$. □

Eine weitere wichtige Reihe ist die Binomialreihe. Wir erinnern an die binomische Formel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Eine Verallgemeinerung:

Definition (Binomialreihe) Für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha = \ & \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \\ & \text{wobei } \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, |x| < 1.\end{aligned}}$$

Spezialfälle:
(1) $\alpha = n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = 0$$

für $k > n$, da der Zähler den Faktor $(n-n) = 0$ enthält. Damit erhält man die binomische Formel.
(2) $\alpha = -1$: Wegen

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k$$

ergibt sich

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \text{ für } |x| < 1.$$

Die geometrische Reihe ist also ein Spezialfall der binomischen Reihe.
(3) $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{0} &= 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{8}, \\ \binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\ &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{k!} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \quad (k \geq 2)\end{aligned}$$

Also

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \dots \quad (|x| < 1).$$

(4) $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{0} &= 1, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \quad (k\geq 1)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4 \pm \ldots \quad (|x|<1).
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 6.3.1 Ermittle daraus durch Integrieren die Potenzreihendarstellung von arcsin!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\ldots)dx\\
&= x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{9\cdot 128}x^9+\ldots
\end{aligned}$$

Die Potenzreihen, die wir bisher betrachtet haben, sind Potenzreihen mit dem Entwicklungspunkt 0. Allgemeiner definiert man

Definition Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

heißt *Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt* (oder *Zentrum*) a. Die Zahlen a_k heißen die *Koeffizienten* dieser Potenzreihe.

Bisher hatten wir den Fall $a = 0$ betrachtet; diesen Fall erreicht man durch die Substitution $z := x - a$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Als Konvergenzradius einer Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt a bezeichnet man den Konvergenzradius R der entsprechenden Reihe mit Zentrum 0. Für das Konvergenzintervall M gilt

$$(a-R, a+R) \subseteq M \subseteq [a-R, a+R].$$

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0 überträgt sich entsprechend auf Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt.

Beispiel 6.3.2 Die Darstellung der e-Funktion als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a folgt aus $e^x = e^a e^{x-a}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.4 Taylorreihen

Die Funktion f sei über $(a-R, a+R)$ $(R>0)$ als Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

mit Entwicklungspunkt a darstellbar. Dann kann man die Koeffizienten a_k wie folgt berechnen. Es gilt nach Satz 6.3.1:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-a)^{k-n} \\ &= n(n-1)\cdots 1a_n + (n+1)n\cdots 2a_{n+1}(x-a) + \ldots . \end{aligned}$$

Setzen wir nun $x = a$, so erhalten wir $f^{(n)}(a) = n!a_n$ oder umgeformt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Damit erhalten wir

Satz 6.4.1 (Koeffizientenvergleich) *Aus*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$$

für alle $x \in (a-R, a+R)$ $(R>0)$ *folgt*

$$a_k = b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wir versuchen nun, eine beliebig oft differenzierbare Funktion f über einem Intervall $(a-R, a+R)$ $(R>0)$ als Potenzreihe darzustellen. Satz 6.4.1 besagt: Wenn eine solche Darstellung überhaupt möglich ist, dann nur in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Eine solche Reihe nennt man *Taylor-Reihe zu der Funktion f um den Punkt a* (oder *mit Entwicklungspunkt a*). Gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ für } a-R < x < a+R,$$

so sagt man: *f lässt sich um a als Taylor-Reihe darstellen* bzw. *f lässt sich um a in eine Taylor-Reihe entwickeln.*

Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich eine gegebene Funktion f um einen Punkt a als Taylor-Reihe darstellen lässt, betrachten wir die Approximation von f durch Taylor-Polynome.

Definition Das Polynom

$$T_n(x,a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt das n-te *Taylor-Polynom von f um a.*

Satz 6.4.2 (Taylor-Formel) *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a, x \in I$. Dann gilt*

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x,a)} + R_{n+1}(x,a)}$$

mit dem Restglied

$$\boxed{R_{n+1}(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \quad \text{(Cauchy)}}$$

bzw.

$$\boxed{R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \ \ \textit{mit } \xi \textit{ zwischen } x \textit{ und } a \quad \text{(Lagrange)}}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \quad \text{(Hauptsatz)} \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt \quad \text{(Partielle Integration)} \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt \\
&= \text{usw.}
\end{aligned}$$

Die Lagrangesche Form des Restglieds ergibt sich durch den Mittelwertsatz der Integralrechnung. □

Deutung der Taylor-Formel

Durch $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ wird ein Polynom

$$p(x) = T_n(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

bestimmt, das f in einer Umgebung des Punktes $x = a$ gut approximiert:

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Das Restglied

$$R_{n+1}(x,a) = f(x) - T_n(x,a)$$

ist der Fehler, der hierbei gemacht wird.

Durch Kenntnis des Restglieds kann man diesen Fehler abschätzen:

Beispiel 6.4.1

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (a = 0).$$

Für $|x| \leq 1$ ergibt sich die Abschätzung

$$\left| e^x - 1 - x - \ldots - \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

(ξ zwischen 0 und x!)

Übungsaufgabe 6.4.1 Bei vorgebener Fehlertoleranz $\pm\varepsilon$ ist n (in Abhängigkeit von x) so zu bestimmen, dass $|R_{n+1}(x,a)| \leq \varepsilon$ gilt.

Lösung für $\varepsilon = 10^{-7}$, $x = \frac{1}{10}$: $n = 5$ ($\frac{e}{6!}10^{-6} < 10^{-7}$).
Lösung für $\varepsilon = 10^{-7}$, $x = 1$: $n = 10$ ($\frac{e}{11!} < 10^{-7}$).

Beispiel 6.4.2

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\sin \xi}{8!}x^8 \quad (a = 0).$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \right| = \left| \frac{\sin \xi}{8!}x^8 \right| \leq \frac{1}{8!}|x|^8.$$

Je weiter wir von 0 weggehen, desto größer wird der Fehler!

Folgerungen aus der Taylor-Formel

Übungsaufgabe 6.4.2 Es sei I eine offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Welche Gestalt hat f?

Lösung f ist ein Polynom vom Grad $\leq n$. Denn für das Lagrangesche Restglied folgt $R_{n+1}(x, a) = 0$, also $f(x) = T_n(x, a)$ für $a \in I$.

Satz 6.4.3 (3. Extremwerttest) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar, $a \in I$, und es gelte*

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dann gilt

(a) *a Extremstelle $\Leftrightarrow$ n gerade.*

(b) *n gerade, $f^{(n)}(a) \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a$ lokale $\left\{ \begin{array}{c} \textit{Maximalstelle} \\ \textit{Minimalstelle} \end{array} \right\}$.*

Beweis. Die Taylor-Formel lautet in diesem Fall:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n.$$

Daraus liest man die Behauptungen des Satzes ab. □

Es sei nun f eine auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion, $a \in I$. Dann kann man zu f die Taylor-Reihe um a bilden:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Zwei Fragen müssen geklärt werden:

1. Für welche x konvergiert die Taylor-Reihe?

2. Wenn die Taylor-Reihe für ein $x \in I$ konvergiert, konvergiert sie dann gegen $f(x)$?

Warnung Es ist möglich, dass die Taylor-Reihe nur für für $x = a$ konvergiert. Es ist auch möglich, dass die Taylor-Reihe eine von $f(x)$ verschiedene Summe besitzt.

Beispiel 6.4.3 Man betrachte die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Wegen $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 0$ ist dieTaylor-Reihe von f um 0 die Nullreihe, aber $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

Durch die Taylor-Formel erhalten wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass f durch die zugehörige Taylor-Reihe dargestellt wird: Die Taylor-Formel lautet:

$$f(x) = T_n(x,a) + R_{n+1}(x,a).$$

Also gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x,a) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0.$$

Also erhalten wir:

Satz 6.4.4 (Taylor-Entwicklung) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $a \in I$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe von f um a genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, d.h. es gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

für die das Restglied

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt.

Bemerkung 6.4.1 Eine hinreichende Bedingung für $\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$ ist: Es gibt Konstanten A, B, so dass für alle $x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(x)| \leq AB^n$$

gilt. (Denn dann gilt: $|R_n(x,a)| \leq A\dfrac{B^n}{n!}(x-a)^n \to 0$ für $n \to \infty$.)

Frage. Wie sieht die Taylor-Reihe eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ aus?

Anwort. $p(x)$ lässt sich um jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$ in die Taylor-Reihe

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

entwickeln. (Denn: $p^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}(x,a) = 0 \Rightarrow p(x) = T_n(x,a)$ für alle x.)

Wie findet man nun Reihenentwicklungen?

(a) Mit der Taylor-Formel und dem Nachweis $R_n(x,a) \to 0$. Im Allgemeinen ungeschickt.

(b) Bekannte Reihen differenzieren oder integrieren. Beispiele haben wir schon gesehen, vgl. Übungsaufgabe 6.3.1.

(c) Als Summe oder Produkt von Funktionen mit bekannter Reihenentwicklung darstellen.

Beispiel 6.4.4

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \pm \ldots\right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Entsprechend

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Zum Abschluss wollen wir noch zwei Anwendungsbeispiele darstellen.

Grenzwertberechnungen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \pm \ldots\right) = 1.
\end{aligned}$$

Integration

Wir betrachten das *elliptische Integral*

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (0 \leq k^2 < 1).$$

Der Integrand besitzt keine Stammfunktion unter den elementaren Funktionen. Wir behelfen uns dadurch, dass wir das Integral näherungsweise berechnen. Dazu stellen wir den Integrand als Potenzreihe dar und integrieren dann gliedweise. Mit $x = -k^2 \sin^2 t$ ergibt die binomische Reihe mit $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 t + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 t + \frac{5}{16} k^6 \sin^6 t + \dots$$

$$\Rightarrow \quad F(\varphi, k) = \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 t dt + \frac{3}{8} k^4 \int_0^{\varphi} \sin^4 t dt + \frac{5}{16} k^6 \int_0^{\varphi} \sin^6 t dt + \dots$$

Speziell für $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$K(k) := F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \dots\right), \quad |k| < 1.$$

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra I **3**
1.1 Zahlen . . . 3
1.2 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . 5
1.3 Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ . . . 6
1.4 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . 13
1.5 Geraden und Ebenen . . . 16
1.6 Komplexe Zahlen . . . 20
1.7 Lineare Gleichungssysteme . . . 23
1.8 Basis und Dimension . . . 30
1.9 Matrizen . . . 33
1.10 Determinanten . . . 40

2 Lineare Algebra II **45**
2.1 Lineare Abbildungen . . . 45
2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 47
2.3 Koordinatentransformation . . . 50

3 Funktionen **55**
3.1 Polynome und rationale Funktionen . . . 55
3.2 Folgen und Reihen . . . 60
3.3 Grenzwerte von Funktionen . . . 71
3.4 Stetigkeit . . . 75

4 Differentiation **77**
4.1 Differenzierbarkeit . . . 77
4.2 Rechenregeln . . . 80
4.3 Umkehrfunktionen . . . 81
4.4 Extremwerte und Mittelwertsatz . . . 83
4.5 Elementare Funktionen . . . 86
4.6 Die Regel von de L'Hospital . . . 94
4.7 Nullstellen und Fixpunkte . . . 96

5 Integration **99**
5.1 Das bestimmte Integral 99
5.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 102
5.3 Integrationsregeln 103
5.4 Uneigentliche Integrale 107
5.5 Partialbruchzerlegung 111

6 Potenzreihen **117**
6.1 Gleichmäßige Konvergenz 117
6.2 Konvergenzradius 120
6.3 Reihenentwicklung der elementaren Funktionen 124
6.4 Taylorreihen 128