

# **Mathematik für Ingenieure II**

Sommersemester 2014

W. Ebeling

©Wolfgang Ebeling  
Institut für Algebraische Geometrie  
Leibniz Universität Hannover  
Postfach 6009  
30060 Hannover  
E-mail: [ebeling@math.uni-hannover.de](mailto:ebeling@math.uni-hannover.de)

# Kapitel 7

## Kurven im $\mathbb{R}^n$

### 7.1 Ebene Kurven

Wir wollen nun Kurven in der Ebene betrachten.

**Definition** Eine *ebene Kurve* ist die Lösungsmenge einer Gleichung:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

Eine andere Möglichkeit, Kurven zu beschreiben, ist eine Parameterdarstellung. Wir betrachten eine vektorwertige Funktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (a \leq t \leq b).$$

Lässt man  $t$  variieren, so durchläuft der Punkt  $\vec{r}(t)$  eine Kurve. Die Funktion  $\vec{r}(t)$  heißt *Parameterdarstellung* dieser Kurve,  $t$  der *Parameter* und  $[a, b]$  das *Parameterintervall*.

#### Kinematische Deutung

Man fasst  $t \in [a, b]$  als Zeit und  $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$  als Ort auf. Die Parameterdarstellung beschreibt dann die Bewegung eines Massenpunktes auf der Kurve.

Zu einer Kurve gibt es unendlich viele verschiedene Parameterdarstellungen, denn es können auf ihr ganz verschiedene Bewegungen stattfinden.

**Beispiel 7.1.1** (1) Die Gerade durch die Punkte  $P_0 = (x_0, y_0)$  und  $P_1 = (x_1, y_1)$  ( $P_0 \neq P_1$ ) hat die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0.$$

Sie besitzt die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \end{pmatrix}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(2) Der Kreis um  $P_0 = (x_0, y_0)$  vom Radius  $R$  hat die Gleichung

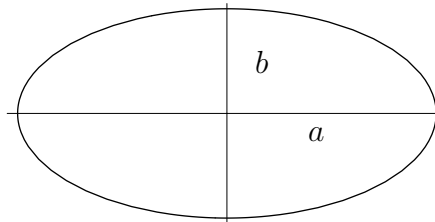
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

und die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R \cos t \\ y_0 + R \sin t \end{pmatrix}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

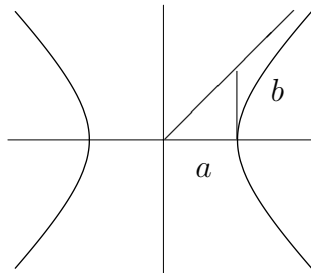
(3) **Kegelschnitte** (in Hauptachsenlage):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ellipse

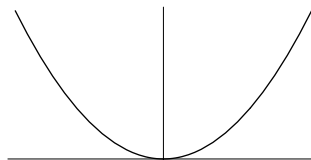
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Hyperbel

Hier ist  $a, b > 0$ .

$$x^2 - y = 0$$



Parabel

Die Ellipse hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

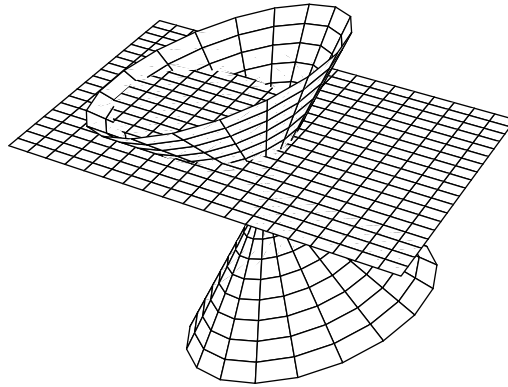


Abbildung 7.1: Die Ellipse als Kegelschnitt

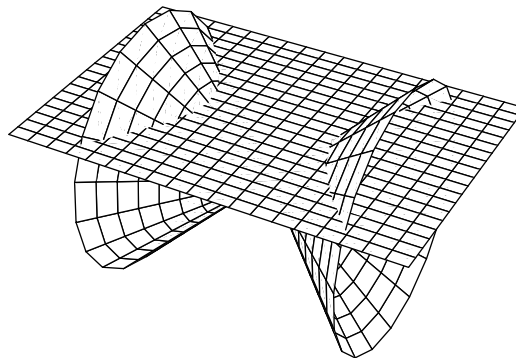


Abbildung 7.2: Die Hyperbel als Kegelschnitt

(4) Ein Graph  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) besitzt die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad (a \leq t \leq b).$$

Von einer Parameterdarstellung  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , kann man im Allgemeinen nur stückweise zu einer *expliziten Darstellung*  $y = f(x)$  oder  $x = g(y)$  übergehen: Zum Beispiel beim Kreis gilt für  $0 \leq t \leq \pi$ ,  $\pi \leq t \leq 2\pi$ :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} & (0 \leq t \leq \pi), \\ y &= y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} & (\pi \leq t \leq 2\pi). \end{aligned}$$

(5) **Zykloiden:** Lässt man einen Kreis  $K$  vom Radius  $R$  auf der  $x$ -Achse abrollen, so beschreibt ein Punkt  $P$  auf  $K$ , der vom Kreismittelpunkt  $M$  den

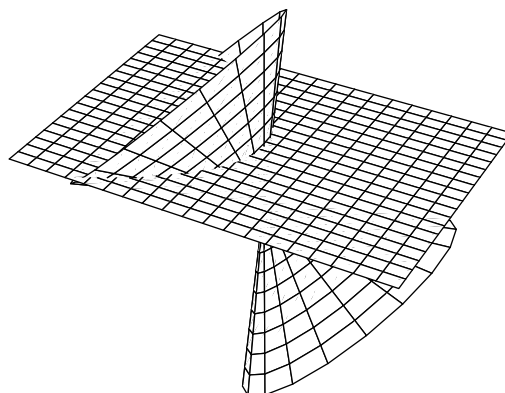
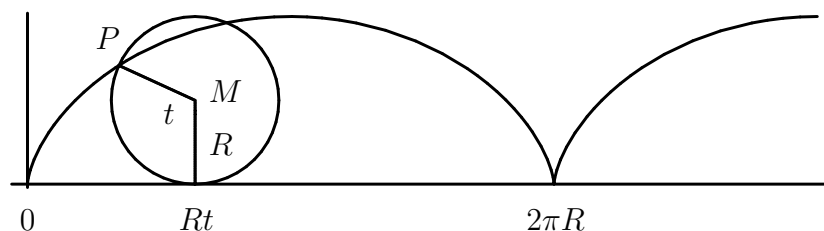


Abbildung 7.3: Die Parabel als Kegelschnitt

Abstand  $a$  hat, eine *Zykloide* (oder *Radkurve*). Bild für  $a = R$ :



Sie besitzt eine Parameterdarstellung

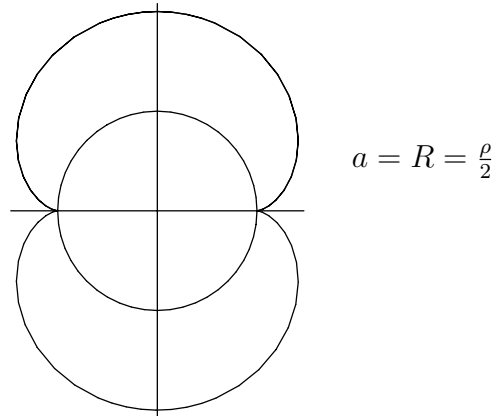
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} Rt - a \sin t \\ R - a \cos t \end{pmatrix}, \quad (0 \leq t \leq \infty).$$

Denn nach dem Abrollen um den Winkel  $t$  liegt  $M$  in  $(x_M, y_M) = (Rt, R)$  und  $P$  in  $(x(t), y(t))$  mit

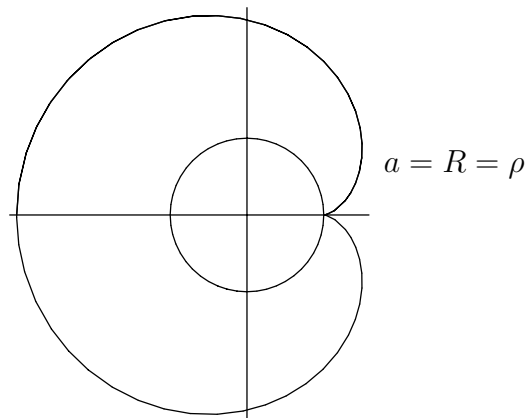
$$\begin{aligned} x(t) &= x_M - a \sin t = Rt - a \sin t, \\ y(t) &= y_M - a \cos t = R - a \cos t. \end{aligned}$$

Eine *Epizykloide* entsteht, wenn der Kreis nicht auf der  $x$ -Achse, sondern auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = \rho^2$  abrollt. Sie hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (\rho + R) \cos t - a \cos \left( \frac{\rho + R}{R} t \right) \\ (\rho + R) \sin t - a \sin \left( \frac{\rho + R}{R} t \right) \end{pmatrix}$$

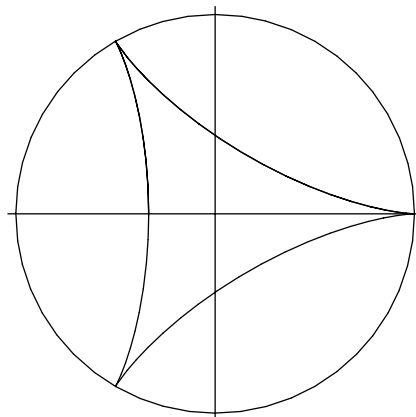


Spezialfall:  $\rho = R = a$ : *Herzlinie (Kardiode)*



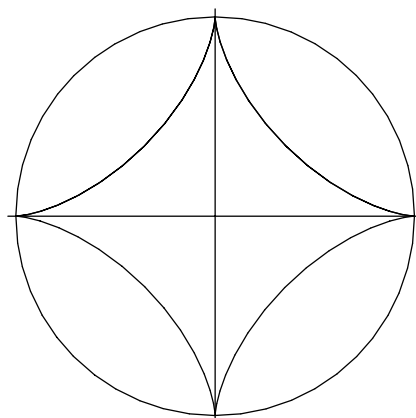
Eine *Hypozykloide* entsteht beim Abrollen in Innern des Kreises. Sie hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (\rho - R) \cos t + a \cos \left( \frac{\rho - R}{R} t \right) \\ (\rho - R) \sin t - a \sin \left( \frac{\rho - R}{R} t \right) \end{pmatrix}$$



$$a = R = \frac{\rho}{3}$$

Spezialfall:  $a = R = \frac{\rho}{4}$ : *Astroide*



$$a = R = \frac{\rho}{4}$$

Es sei

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung einer Kurve  $K$ . Wir setzen nun voraus, dass  $x(t)$ ,  $y(t)$  differenzierbare Funktionen sind.

**Definition** Der Vektor

$$\dot{\vec{r}}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

heißt der *Tangentialvektor* an  $K$  zum Parameterwert  $t$ .



### Geometrische Deutung

$\dot{\vec{r}}(t)$  lässt sich als Limes von Sekantenvektoren auffassen.

### Kinematische Deutung

Beschreibt  $\vec{r}(t)$  die Bewegung eines Massenpunktes, dann ist  $\dot{\vec{r}}(t)$  der momentane Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt  $t$ .

Ist der Vektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

vom Nullvektor verschieden, so gibt der Vektor

$$\vec{n}(t) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

die positive Normalenrichtung in diesem Punkt an.

**Definition** Die Parameterdarstellung  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , ( $a \leq t \leq b$ ) einer Kurve heißt *regulär*, wenn die Funktionen  $x(t), y(t)$  über  $[a, b]$  stetig differenzierbar sind und  $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \neq 0$  für  $t \in [a, b]$  gilt ( $\dot{x}(a), \dot{x}(b)$  einseitige Ableitungen).

**Satz 7.1.1 (Bogenlänge)** (a) Die Länge eines Kurvenbogens mit regulärer

Parameterdarstellung  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $a \leq t \leq b$ , beträgt

$$L = \int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

(b) Die Bogenlänge des Graphen  $y = f(x)$  einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

**Beispiel 7.1.2** (1) Der Kreisumfang: Ein Kreis vom Radius  $R$  hat die Länge

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

(2) Die Bogenlänge der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 :$$

Sie hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Für die Länge ergibt sich

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt \quad \text{mit } k := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \end{aligned}$$

Die Zahl  $k$  nennt man auch die *numerische Exzentrizität* der Ellipse. Durch die Substitution  $\tau = \frac{\pi}{2} - t$  (beachte  $\sin^2 \tau = \cos^2 t$ ) erhält man die Bogenlänge der Ellipse in der Form ( $\tau$  wieder durch  $t$  ersetzt)

$$L = 4aE(k) \quad \text{mit } E(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

$E(k)$  ist ein *elliptisches Integral zweiter Gattung* und nicht elementar integrierbar.

(3) Der Zykloidenbogen  $x = R(t - \sin t)$ ,  $y = R(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) ( $a = R$ ) hat die Länge

$$L = R \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8R.$$

Es sei

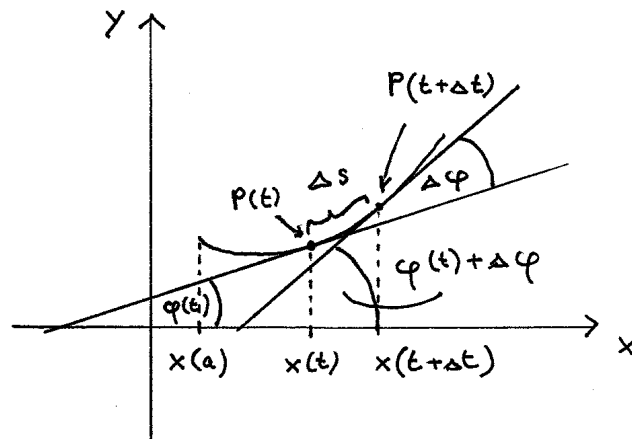
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

eine reguläre Parameterdarstellung,  $a \leq t \leq b$ , mit zweimal differenzierbaren Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Es sei

$$\varphi(t) := \text{Winkel zwischen } x\text{-Achse und Tangentialvektor } \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$s(t) := \int_a^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2} d\tau$$

(Länge des Kurvenbogens über dem Intervall  $[a, t]$ )



Die Änderung  $\Delta\varphi$  der Tangentenrichtung bezogen auf die Änderung  $\Delta s$  der Bogenlänge über dem Intervall  $[t, t + \Delta t]$ , also  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ , ist ein Maß für die durchschnittliche Krümmung des Kurvenbogens über diesem Teilintervall.

**Definition** Die Zahl

$$\kappa(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{s}(t)}$$

heißt die *Krümmung* der Kurve im Punkt  $P(t) = (x(t), y(t))$ .

**Satz 7.1.2** (a) Die Krümmung einer Kurve mit zweimal stetig differenzierbarer regulärer Parameterdarstellung  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $a \leq t \leq b$ , in  $P(t) = (x(t), y(t))$  beträgt

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^3}}$$

(b) Die Krümmung des Graphen  $y = f(x)$  einer zweimal differenzierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $(x, f(x))$  beträgt

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}$$

Wegen  $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0$  haben  $\kappa$  und  $\dot{\varphi}$  dasselbe Vorzeichen. Aus I, Satz 4.4.6, folgt

$$\begin{aligned}\kappa > 0 &\Rightarrow \varphi \text{ w\u00e4chst} \Rightarrow \text{Linkskr\u00fcmmung} \\ \kappa < 0 &\Rightarrow \varphi \text{ f\u00e4llt} \Rightarrow \text{Rechtskr\u00fcmmung}\end{aligned}$$

**Beispiel 7.1.3** Kr\u00fcmmung der Ellipse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix},$$

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} = \frac{ab(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}}.$$

Spezialfall:  $a = b = R$ :  $\kappa = \frac{1}{R}$ .

**Beispiel 7.1.4** Kr\u00fcmmung der Parabel  $y = x^2$ :

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}.$$

**Definition** Es sei  $P = (x(t), y(t))$  ein Kurvenpunkt. Der zu  $P$  geh\u00f6rige *Kr\u00fcmmungskreis* ist der durch  $P$  gehende Kreis mit derselben Kr\u00fcmmung und Tangentenrichtung in  $P$  wie die Kurve. Der Radius  $r$  des Kr\u00fcmmungskreises in  $P$  hei\u00dft der *Kr\u00fcmmungsradius* der Kurve in  $P$ .

Falls  $\kappa \neq 0$  ist, gilt nach Beispiel 7.1.3

$$r = \frac{1}{|\kappa|}$$

Der Mittelpunkt  $(x_M, y_M)$  des Kr\u00fcmmungskreises liegt auf der Normalen im Abstand  $\frac{1}{|\kappa|}$  von  $P$  und hat die Koordinaten

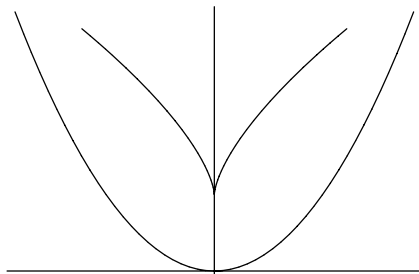
$$\begin{aligned}x_M &= x(t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \\ y_M &= y(t) + \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\end{aligned}$$

Durchl\u00e4uft  $t$  das Parameterintervall, dann durchl\u00e4uft  $(x_M, y_M)$  eine Kurve, die *Evolute* der gegebenen Kurve genannt wird.

**Beispiel 7.1.5** Evolute der Parabel  $x = t, y = t^2$ :

$$\begin{aligned}x_M &= t - 2t \frac{1 + 4t^2}{2} = -4t^3 \\y_M &= t^2 + \frac{1 + 4t^2}{2} = 3t^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Diese Kurve heißt *Neilsche Parabel*.



Statt in kartesischen Koordinaten kann man eine Kurve auch in Polarkoordinaten darstellen und den Winkel als Parameter nehmen.

Die Umrechnungsformeln kartesische Koordinaten  $\leftrightarrow$  Polarkoordinaten lauten

$$\begin{aligned}(a) \quad & x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \\(b) \quad & r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y < 0 \\ \text{unbestimmt}, & \text{falls } r = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Lassen wir einen Zeiger, der sich um den Nullpunkt dreht und seine Länge verändern kann, auf einer Kurve laufen, so hat er beim Winkel  $\varphi$  die Länge  $r(\varphi)$ . Die Polarkoordinaten des entsprechenden Kurvenpunktes sind  $(r(\varphi), \varphi)$ ,  $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$ .

**Definition** Die Darstellung

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

heißt *Polardarstellung* der Kurve. Die  $x$ -Achse heißt *Polarachse*.

Die Parameterdarstellung der Kurve  $r = r(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , mit dem Winkel  $\varphi$  als Parameter lautet:

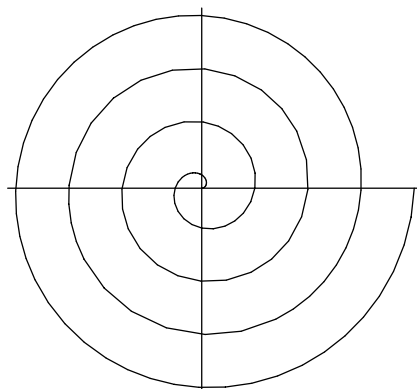
$$\varphi \mapsto \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$$

Mit dieser Parameterdarstellung kann man Tangentialvektoren, Bogenlänge, Krümmung usw. berechnen. Insbesondere folgt aus Satz 7.1.1(a) für die Bogenlänge der Kurve  $r = r(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

**Beispiel 7.1.6** (1) Polardarstellung eines Kreises vom Radius  $c$  um 0:  $r = c$ .  
 (2) Die *Archimedische Spirale* hat die Polardarstellung

$$r = a\varphi \quad (a > 0, 0 \leq \varphi < \infty).$$



Die Bogenlänge nach einem Umlauf beträgt:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + a^2} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi \quad \text{Substitution: } \varphi = \sinh t, d\varphi = \cosh t \\ &= a \int_{\operatorname{arsinh} 0}^{\operatorname{arsinh} 2\pi} \cosh^2 t dt \\ &= \frac{a}{2} \left( 2\pi \sqrt{1 + (2\pi)^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + (2\pi)^2}) \right). \end{aligned}$$

(3) Die *Herzlinie* hat die Polardarstellung

$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad (a > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

(Zugehörige Parameterdarstellung:

$$\varphi \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2}(2 \cos \varphi + \cos 2\varphi) \\ \frac{a}{2}(2 \sin \varphi + \sin 2\varphi) \end{pmatrix} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Bogenlänge:

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = 8a.$$

Wir wollen nun Sektorflächen über Kurvenstücken betrachten. Es sei

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b,$$

eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung eines ebenen Kurvenstücks  $K$ , das von jedem Ursprungsstrahl höchstens einmal getroffen wird. Dann besitzt  $K$  eine Polardarstellung  $r = r(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , so dass jedem Winkel  $\varphi$  höchstens ein Parameterwert  $t$  entspricht. Wir betrachten dann die von  $K$  begrenzte Sektorfläche.

**Satz 7.1.3 (Leibnizsche Sektorformel)** *Der Inhalt der durch  $K$  begrenzten Sektorfläche beträgt*

$$F = \frac{1}{2} \left| \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt \right|$$

**Satz 7.1.4 (Sektorformel in Polarkoordinaten)** *Der Inhalt der durch  $K$  begrenzten Sektorfläche beträgt in Polarkoordinaten*

$$F = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi$$

**Beispiel 7.1.7** (1) Der Flächeninhalt des Ellipsensektors

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

beträgt nach der Leibnizschen Sektorformel:

$$F_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [ab \cos^2 t + ab \sin^2 t] dt = ab \frac{\pi}{4}.$$

Also ist der Flächeninhalt der Ellipse gleich  $F = ab\pi$ .

(2) Für  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  begrenzt die Archimedische Spirale  $r = a\varphi$  eine Sektorfläche mit dem Inhalt

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \pi^3.$$

## 7.2 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Für ebene Kurven haben wir verschiedene Darstellungsarten kennengelernt:

- abschnittsweise explizite Darstellung als Graph  $y = f(x)$  einer Funktion
- implizite Darstellung  $F(x, y) = 0$
- Parameterdarstellung  $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- Polardarstellung  $r = r(\varphi)$

Für die allgemeine Behandlung von Kurven, insbesondere auch von Raumkurven, eignet sich am besten die Parameterdarstellung.

Wir betrachten nun eine auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  erklärte vektorwertige Funktion

$$\begin{aligned} \vec{x} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Funktionen  $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto x_i(t)$ , heißen die *Komponentenfunktionen* von  $\vec{x}(t)$ .

Die grundlegenden Begriffe der Analysis lassen sich nun auf solche Funktionen verallgemeinern, indem man sie komponentenweise erklärt:

### Definition

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$$



**Definition** Eine Funktion  $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{stetig} \\ \text{differenzierbar} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \text{in } t_0 \in I \\ \text{auf } I \end{array} \right\}$$

$:\Leftrightarrow$  alle Komponentenfunktionen sind  $\left\{ \begin{array}{c} \text{stetig} \\ \text{differenzierbar} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \text{in } t_0 \in I \\ \text{auf } I \end{array} \right\}$ .

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)] = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

Wie im ebenen Fall heißt  $\dot{\vec{x}}(t)$  der *Tangentenvektor* von  $\vec{x}$  an der Stelle  $t \in I$ .

Die geometrische und kinematische Interpretation ist die gleiche wie im Fall von ebenen Kurven.

Man hat folgende

**Ableitungsregeln** ( $\vec{x}, \vec{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ )

- (a)  $\frac{d}{dt}(\alpha\vec{x}(t) + \beta\vec{y}(t)) = \alpha\dot{\vec{x}}(t) + \beta\dot{\vec{y}}(t)$  (Linearität).
- (b)  $\frac{d}{dt}[\vec{x}(t) \cdot \vec{y}(t)] = \dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{x}(t) \cdot \dot{\vec{y}}(t)$  (Produktregel für das Skalarprodukt)
- (c)  $n = 3$ :  $\frac{d}{dt}[\vec{x}(t) \times \vec{y}(t)] = \dot{\vec{x}}(t) \times \vec{y}(t) + \vec{x}(t) \times \dot{\vec{y}}(t)$  (Produktregel für das Vektorprodukt)
- (d)  $\frac{d}{dt}[\alpha(t)\vec{y}(t)] = \dot{\alpha}(t)\vec{y}(t) + \alpha(t)\dot{\vec{y}}(t)$  (Produktregel für die Multiplikation mit einer skalaren Funktion).

**Übungsaufgabe 7.2.1** Man zeige

$$|\vec{x}(t)| = \text{const. für } t \in I \Rightarrow \vec{x}(t) \perp \dot{\vec{x}}(t) \text{ für } t \in I.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} |\vec{x}(t)| = \text{const.} &\Rightarrow \vec{x}(t) \cdot \vec{x}(t) = |\vec{x}(t)|^2 = \text{const.} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{x}(t) \cdot \vec{x}(t) = 2\dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{x}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) \perp \vec{x}(t) \end{aligned}$$

□

**Definition** Ein *Kurvenstück* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetig differenzierbare Funktion  $\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  oder auch das Bild  $\{\vec{x}(t) \mid a \leq t \leq b\}$  einer solchen Funktion. Der Punkt  $\vec{x}(a)$  heißt *Anfangspunkt*,  $\vec{x}(b)$  *Endpunkt* des Kurvenstücks. Ein Kurvenstück  $\vec{x}$  heißt *regulär*, wenn  $\dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0}$  für alle  $t \in [a, b]$  gilt. Ein Punkt  $\vec{x}(t)$  mit  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$  heißt *singulärer Punkt* des Kurvenstücks.

Es sei nun  $\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein reguläres Kurvenstück im  $\mathbb{R}^3$ ,  $t \in [a, b]$ . Für die *Bogenlänge* des Kurvenstücks über  $[a, b]$  gilt:

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{x}}(t)| dt.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\vec{x}}(t)|.$$

**Definition** Es sei nun  $\vec{x}$  hinreichend oft differenzierbar. Wir definieren nun

$$\vec{T}(t) := \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|} \dot{\vec{x}}(t) \quad \text{Tangenten(einheits)vektor}$$

Für  $\dot{\vec{T}}(t) \neq \vec{0}$  setzen wir

$$\vec{N}(t) := \frac{1}{|\dot{\vec{T}}(t)|} \dot{\vec{T}}(t) \quad \text{Hauptnormalen(einheits)vektor}$$

$$\vec{B}(t) := \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \quad \text{Binormalen(einheits)vektor}$$

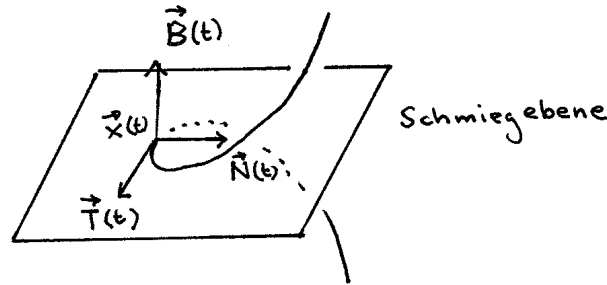
Nach der obigen Übungsaufgabe stehen die Vektoren  $\vec{N}(t)$  und  $\vec{T}(t)$  zu jeder Parameterstelle  $t$  senkrecht aufeinander. Deswegen bildet

$$(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$$

eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Man nennt dieses Tripel von Vektoren das *begleitende Dreibein* der Kurve an der Parameterstelle  $t$ . Die von  $\vec{T}(t)$  und  $\vec{N}(t)$  aufgespannte Ebene durch  $\vec{x}(t)$ ,

$$\vec{r} = \vec{x}(t) + \lambda \vec{T}(t) + \mu \vec{N}(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

heißt die *Schmiegeebene* der Kurve zum Parameterwert  $t$ . Sie ist der Grenzwert der Ebenen durch  $\vec{x}(t)$  und zwei weitere Kurvenpunkte.



Die *Krümmung* einer ebenen Kurve hatten wir eingeführt als die Änderung der Tangentenrichtung bezogen auf die Änderung  $\Delta s$  der Bogenlänge. Die Änderung der Tangentenrichtung wurde in diesem Fall durch die Änderung des Winkels der Tangente  $\Delta\varphi$  gegeben. Im allgemeinen Fall müssen wir die Änderung des Tangentenvektors

$$\Delta\vec{T} = \vec{T}(t + \Delta t) - \vec{T}(t)$$

auf dem Intervall  $[t, t + \Delta t]$  betrachten. Wir definieren

**Definition**

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \Delta\vec{T} = \frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\vec{T}}(t) \quad \text{Krümmungsvektor}$$

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} \left| \dot{\vec{T}}(t) \right| = \frac{\left| \dot{\vec{T}}(t) \right|}{\left| \dot{\vec{x}}(t) \right|} \quad \text{Krümmung}$$

Für die Darstellung von  $\dot{\vec{x}}$  und  $\ddot{\vec{x}}$  im begleitenden Dreibein  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \left| \dot{\vec{x}}(t) \right| \vec{T}(t) = \dot{s}(t) \vec{T}(t) \\ \ddot{\vec{x}}(t) &= \frac{d}{dt} (\dot{s}(t) \vec{T}(t)) \\ &= \ddot{s}(t) \vec{T}(t) + \dot{s}(t) \dot{\vec{T}}(t) = \ddot{s}(t) \vec{T}(t) + \dot{s}(t) \left| \dot{\vec{T}}(t) \right| \vec{N}(t) \\ &= \ddot{s}(t) \vec{T}(t) + \dot{s}(t)^2 \kappa(t) \vec{N}(t), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= \dot{s}(t)\vec{T}(t) \\ \ddot{\vec{x}}(t) &= \ddot{s}(t)\vec{T}(t) + \dot{s}(t)^2\kappa(t)\vec{N}(t)\end{aligned}$$

### Kinematische Deutung

$\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes

- $\dot{\vec{x}}(t) = \dot{s}(t)\vec{T}(t)$  Geschwindigkeitsvektor, tangential zur Bahn
- $|\dot{\vec{x}}(t)| = \dot{s}(t)$  Momentangeschwindigkeit

Die Vektoren  $\dot{\vec{x}}(t)$  und  $\ddot{\vec{x}}(t)$  haben bezüglich der Basis  $(\vec{T}, \vec{N})$  der Schmiegeebene die Koordinaten

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{s}(t) \\ \dot{s}(t)^2\kappa(t) \end{pmatrix}.$$

Satz 7.1.2 ergibt für die Krümmung in der Schmiegeebene

$$\kappa_s(t) = \frac{\dot{s}(t) \cdot \dot{s}(t)^2\kappa(t) - 0 \cdot \ddot{s}(t)}{\sqrt{(\dot{s}(t)^2)^3}} = \kappa(t).$$

Es folgt

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \text{Radius eines Krümmungskreises in der Schmiegeebene}$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) &= \left(\dot{s}(t)\vec{T}(t)\right) \times \left(\ddot{s}(t)\vec{T}(t) + \dot{s}(t)^2\kappa(t)\vec{N}(t)\right) \\ &= \dot{s}(t)\ddot{s}(t)\vec{T}(t) \times \vec{T}(t) + \dot{s}(t)^3\kappa(t)\vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \\ &= \dot{s}(t)^3\kappa(t)\vec{B}(t) \\ \left|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)\right| &= \dot{s}(t)^3\kappa(t) \quad (\text{da } |\vec{B}(t)| = 1)\end{aligned}$$

Also folgt

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|}{|\dot{\vec{x}}(t)|^3}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|} \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \quad (\text{falls } |\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)| \neq 0)$$

Für eine ebene Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt die Formel für  $\kappa$

$$\kappa = \frac{\left| \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

Dies ist bis auf das Vorzeichen die Formel von Satz 7.1.2(a). (Nur falls  $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} > 0$  haben  $\vec{n}$  und  $\vec{N}$  die gleiche Richtung!)

Aufgrund der Formel für  $\vec{B}(t)$  bestimmt man das begleitende Dreibein  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  in der Reihenfolge

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \dot{\vec{x}}, \\ \vec{B} &= \frac{1}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|} \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}, \\ \vec{N} &= \vec{B} \times \vec{T}. \end{aligned}$$

Bei Raumkurven kommt zusätzlich zu der Krümmung eine weitere Größe ins Spiel, die Torsion. Sie beschreibt das Herauswinden der Kurve aus der Schmiegeebene. Dies wird durch die Änderungsrate des Binormalenvektors, bezogen auf die Bogenlänge, gemessen:

**Definition** Der Vektor

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} [\vec{B}(t + \Delta t) - \vec{B}(t)] = \frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\vec{B}}(t)$$

heißt der *Torsionsvektor*.

Nach der Übungsaufgabe ist wegen  $|\vec{B}(t)| = 1$  der Vektor  $\dot{\vec{B}}$  orthogonal zu  $\vec{B}$ . Aus

$$\dot{\vec{B}} = \frac{d}{dt}(\vec{T} \times \vec{N}) = \dot{\vec{T}} \times \vec{N} + \vec{T} \times \dot{\vec{N}} = \vec{T} \times \dot{\vec{N}}$$

folgt auch  $\dot{\vec{B}} \perp \vec{T}$ , also  $\dot{\vec{B}} \parallel \vec{N}$ . Deshalb gibt es ein  $\tau(t)$  mit

$$\boxed{\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\vec{B}}(t) = -\tau(t) \vec{N}(t).}$$

**Definition** Die Zahl  $\tau(t)$  heißt die *Torsion* der Kurve zum Parameterwert  $t$ .

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \tau &= -\frac{1}{\dot{s}} \dot{\vec{B}} \cdot \vec{N} \\
 &= \frac{1}{\dot{s}} \dot{\vec{B}} \cdot \dot{\vec{N}} \quad (\vec{B} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{B}} \cdot \vec{N} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{N}} = 0) \\
 &= \frac{1}{\dot{s}} \dot{\vec{B}} \cdot \frac{1}{\dot{s}^2 \kappa} \ddot{\vec{x}} \quad \left( \text{aus } \frac{d}{dt} \ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} (\dot{s} \vec{T} + \dot{s}^2 \kappa \vec{N}) \right) \\
 &= \left( \frac{1}{\dot{s}} \frac{1}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|} \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} \right) \cdot \left( \frac{1}{\dot{s}^2 \kappa} \ddot{\vec{x}} \right) \\
 &= \frac{[\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}]}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}
 \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\tau(t) = \frac{[\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t)]}{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|^2}$$

Wir fassen die Resultate in einem Satz zusammen

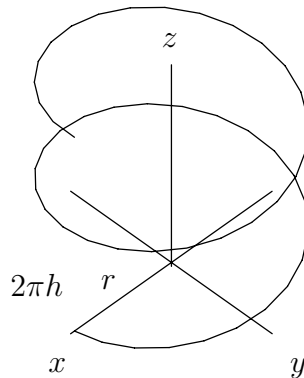
**Satz 7.2.1** Eine dreimal stetig differenzierbare Kurve  $\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  besitzt für jeden Parameterwert  $t$  mit  $\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}(t) \neq 0$

Tangentenvektor	$\vec{T}(t) = \frac{1}{ \dot{\vec{x}}(t) } \dot{\vec{x}}(t)$
Binormalenvektor	$\vec{B}(t) = \frac{1}{ \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) } \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)$
Hauptnormalenvektor	$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$
Krümmung	$\kappa(t) = \frac{ \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) }{ \dot{\vec{x}}(t) ^3}$
Torsion	$\tau(t) = \frac{[\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t)]}{ \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) ^2}$

**Beispiel 7.2.1 (Schraubenlinie)** Die neutrale Faser einer Schraubenfeder ist eine Schraubenlinie und besitzt die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi n)$$

( $r$  Radius,  $2\pi h$  Ganghöhe,  $n$  Windungszahl).



Es gilt

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} r \sin t \\ -r \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$R := \left| \dot{\vec{x}}(t) \right| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Damit errechnet man

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rh \sin t \\ -rh \cos t \\ r^2 \end{pmatrix} \\ \vec{B}(t) &= \frac{1}{R} \begin{pmatrix} h \sin t \\ -h \cos t \\ r \end{pmatrix} \\ \vec{N}(t) &= \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} h \sin t \\ -h \cos t \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \kappa(t) &= \frac{r}{r^2 + h^2} \\ \tau(t) &= \frac{1}{r^2(r^2 + h^2)} \begin{vmatrix} -r \sin t & -r \cos t & r \sin t \\ r \cos t & -r \sin t & -r \cos t \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{h}{r^2 + h^2} \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $\kappa(t)$  und  $\tau(t)$  konstant sind.



# Kapitel 8

## Funktionen mehrerer Veränderlicher

### 8.1 Differentiation

Wir wollen nun Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachten.

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine reellwertige Funktion ist eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) =: z$$

Eine reellwertige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  wird auch als *Skalarenfeld* bezeichnet (einem  $\vec{x} \in D$  wird eine skalare physikalische Größe, z.B. Höhe, Temperatur, zugeordnet).

Die Funktion  $f$  kann gegeben sein

- durch eine *explizite* Vorschrift, z.B.  $f(x, y) = 3 - x^2$ .
- durch eine *implizite* Gleichung, z.B.  $f(x, y)$  ist die positive Lösung von  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ( $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ )

Der *Graph* von  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(\vec{x}, z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = f(\vec{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Um eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zu beschreiben, betrachtet man auch

- die *Niveaumengen* (*Niveaukurven*, *Niveauflächen*) von  $f$  zum Niveau  $c \in \mathbb{R}$ :

$$N_c := \{\vec{x} \in D \mid f(\vec{x}) = c\}.$$

- die "partiellen" Funktionen

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

mit  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in D$  (definiert auf einer zu der  $i$ -ten Koordinatenachse parallelen Geraden).

### Anschauliche Darstellung im Fall $n = 2$

Im Fall  $n = 2$  schreiben wir auch  $f(x, y)$ . Der Graph

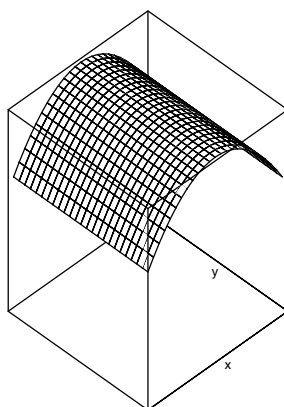
$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ . Sie wird beschrieben durch

- Blockbild
- Höhenkarte

#### (a) Blockbild

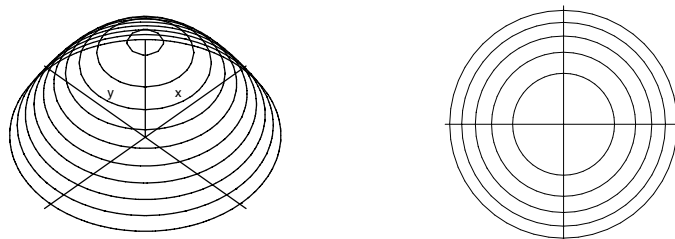
Beispiel:  $f(x, y) = 3 - x^2$  auf  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$



Zur Erstellung eines Blockbildes muss man die Graphen der partiellen Funktionen  $z = f(a_1, y)$  bzw.  $z = f(x, a_2)$  bestimmen.

**(b) Höhenkarte**

Beispiel:  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$



Die Funktion kann auch durch ihre Niveaulinien  $N_c = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$  (*Höhenlinien einer Landkarte*) veranschaulicht werden.

Wir wollen nun Grenzwerte solcher Funktionen betrachten. Dazu brauchen wir ein Maß für den Abstand zweier Punkte des  $\mathbb{R}^n$ .

Der Abstand zweier Punkte  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Die Definitionsmengen von Funktionen einer Veränderlichen waren meistens Intervalle. Dabei machte es für viele Betrachtungen einen Unterschied, ob wir uns im Innern des Intervalls oder in einem Randpunkt befanden. Zur Beschreibung der Definitionsmengen im  $\mathbb{R}^n$  brauchen wir einige topologische Begriffe.

**Definition** Es sei  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Die Menge

$$U_\varepsilon(\vec{a}) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < \varepsilon \}$$

heißt  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\vec{a}$ .

**Beispiel 8.1.1**  $n = 1$ :  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$n = 2$ :  $U_\varepsilon(\vec{a})$  ist eine Kreisscheibe vom Radius  $\varepsilon$  um  $\vec{a}$  ohne Rand.

$n = 3$ :  $U_\varepsilon(\vec{a})$  ist eine Kugel um  $\vec{a}$  vom Radius  $\varepsilon$  ohne Punkte auf der Oberfläche.

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- (a) Ein Punkt  $\vec{a} \in D$  heißt *innerer Punkt* von  $D$ , wenn es eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\vec{a}$  gibt, die ganz in  $D$  enthalten ist.
- (b)  $D$  heißt *offen*, wenn jeder Punkt von  $D$  ein innerer Punkt ist.
- (c) Ein  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$  heißt *Randpunkt* von  $D$ , wenn *jede*  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(\vec{b})$  von  $\vec{b}$  mindestens einen Punkt aus  $D$  und mindestens einen Punkt nicht aus  $D$  enthält.
- (d) Die Menge aller Randpunkte von  $D$  heißt *Rand von  $D$* , in Zeichen  $\partial D$ .
- (e)  $D$  heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.
- (f)  $D$  heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante  $K > 0$  gibt mit

$$|\vec{x}| < K \text{ für alle } \vec{x} \in D.$$

- (g)  $D$  heißt *kompakt*, wenn  $D$  beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beispiel 8.1.2** Die Kreisscheibe (ohne Rand)

$$K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

ist eine offene Menge. Rand:

$$\partial K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

Die Menge

$$\overline{K} = K_r \cup \partial K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

**Warnung** Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind, z.B. halboffene Intervalle,  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

**Definition** Eine Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ , heißt *konvergent gegen  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$* , in Zeichen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \quad \text{oder} \quad \vec{x}_k \rightarrow \vec{a} \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{x}_k - \vec{a}| = 0.$$

**Beispiel 8.1.3** Die Folge

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{k} \cos \frac{2\pi}{k} \\ \frac{2\pi}{k} \sin \frac{2\pi}{k} \end{pmatrix}$$

liegt auf der Archimedischen Spirale und konvergiert gegen 0.

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} \in D \cup \partial D$ .

(a)  $f$  hat in  $\vec{a}$  den Grenzwert  $c \in \mathbb{R}$ , in Zeichen

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c \quad \text{oder} \quad f(\vec{x}) \rightarrow c \quad \text{für} \quad \vec{x} \rightarrow \vec{a},$$

wenn für jede Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  aus  $D$  mit  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$  und  $\vec{x}_k \neq \vec{a}$  für alle  $k$  die Folge  $(f(\vec{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $c$  strebt.

(b)  $f$  heißt *stetig in*  $\vec{a} \in D : \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$ .

(c)  $f$  heißt *stetig auf*  $D$ , wenn  $f$  in jedem  $\vec{a} \in D$  stetig ist.

Da die Definitionen völlig analog zu den Definitionen im Fall einer Variablen sind, übertragen sich die Rechenregeln für Grenzwerte und stetige Funktionen aus Kapitel 3. Insbesondere sind Summe, Produkt, Quotient stetiger Funktionen stetig.

**Beispiel 8.1.4** Die Projektionen

$$p_i : \quad \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad x_i$$

sind stetig und damit auch jedes Polynom in  $n$  Variablen

$$p(\vec{x}) = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq m \\ \vdots \\ 0 \leq k_n \leq m}} \alpha_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

(z.B.  $p(x, y) = \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2$ ).

**Warnung** Die Stetigkeit von  $f(x, y)$  ergibt sich *nicht* aus der Stetigkeit der partiellen Funktionen  $x \mapsto f(x, y_0)$ ,  $y \mapsto f(x_0, y)$ . Gegenbeispiel:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0, \quad f(x, x) = 1, \quad f(x, -x) = -1.$$

Bei Annäherung von  $\vec{0}$  auf der  $x$ - oder  $y$ -Achse ergibt sich als Grenzwert 0, bei Annäherung auf den Geraden  $y = x$  und  $y = -x$  der Grenzwert 1 bzw.  $-1$ . Also ist  $f$  nicht stetig in 0.

Wir kommen nun zur Frage der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in D$ . Wir

betrachten die partielle Funktion

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Existiert die Ableitung dieser Funktion an der Stelle  $x_i = a_i$ , so nennt man diese die *partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$  in  $\vec{a}$* , in Zeichen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \text{ oder } \left. \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{a}}, \quad f_{x_i},$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{t} \end{aligned}}$$

(Ableiten nach  $x_i$  (variabel), andere Variablen als konstant ansehen.)

**Beispiel 8.1.5**  $f(x, y) = x^3 \sin y + e^x y^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \sin y + e^x y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 \cos y + 2e^x y.$$

**Definition**  $f$  heißt *partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen  $f_{x_i}$  existieren.

Ist  $f$  partiell differenzierbar, so fasst man die partiellen Ableitungen zu einem Vektor zusammen. Diesen Vektor schreibt man zweckmäßig als Zeilenvektor.

**Definition** Der Vektor

$$\text{grad } f(\vec{x}) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

heißt der *Gradient von  $f$  in  $\vec{x}$* .

Die Funktion  $\vec{x} \mapsto \text{grad } f(\vec{x})$  ist eine vektorwertige Funktion (ein Vektorfeld): jedem  $\vec{x} \in D$  wird der Vektor  $\text{grad } f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet.

**Beispiel 8.1.6**  $f(x, y) = x^3 \sin y + e^x y^2$ .

$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2 \sin y + e^x y^2, x^3 \cos y + 2e^x y).$$

Man kann nun auch höhere partielle Ableitungen betrachten.

**Notation**  $(f(x, y))$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**Beispiel 8.1.7**  $f(x, y) = x^3 \sin y + e^x y^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6x \sin y + e^x y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 3x^2 \cos y + 2e^x y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 3x^2 \cos y + 2e^x y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -x^3 \sin y + 2e^x. \end{aligned}$$

**Warnung** In diesem Beispiel gilt  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Das braucht aber nicht der Fall zu sein. Gegenbeispiel:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0 \Rightarrow f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

$$\begin{aligned}
f_x &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= y \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0) \\
f_y &= x \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
f_{xy}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^3}{y^3} = -1, \\
f_{yx}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.
\end{aligned}$$

Es gilt aber der folgende Satz:

**Satz 8.1.1 (Schwarz; Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen)**

Für jede Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, deren zweite partielle Ableitungen existieren und stetig sind, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Neben dem Begriff der partiellen Differenzierbarkeit gibt es für Funktionen mehrerer Veränderlicher auch den Begriff der totalen Differenzierbarkeit. Dabei geht man von der Deutung der Ableitung als lineare Approximation aus. Zur Beschreibung der Güte der Approximation führen wir folgendes Symbol ein.

**Definition (Definition des  $o$ -Symbols)** Für  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x}_0 \in D$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , schreibt man

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|^k) \quad (\text{für } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0),$$

falls

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - g(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^k} = 0.$$

also

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|^k) \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - g(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^k} = 0.$$

Die Gleichung  $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|^k)$  besagt: Der bei der Approximation von  $f$  durch  $g$  in der Nähe von  $\vec{x}_0$  gemachte Fehler  $f(\vec{x}) - g(\vec{x})$  ist klein im Vergleich zu  $|\vec{x} - \vec{x}_0|^k$ .



**Beispiel 8.1.8** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion,  $x_0 \in I$ . Dann gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in  $\vec{x}_0 \in D$  *total differenzierbar*, wenn es einen Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \text{ für } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0.$$

**Warnung** Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt nicht die totale Differenzierbarkeit!

**Satz 8.1.2** Es sei  $f$  in  $\vec{x}_0 \in D$  total differenzierbar,

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|).$$

Dann ist  $f$  partiell differenzierbar und es gilt

$$\vec{a} = \text{grad } f(\vec{x}_0).$$

Nach Satz 8.1.2 gilt also: Ist  $f$  in  $\vec{x}_0 \in D$  total differenzierbar, so gilt

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \text{ für } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0.$$

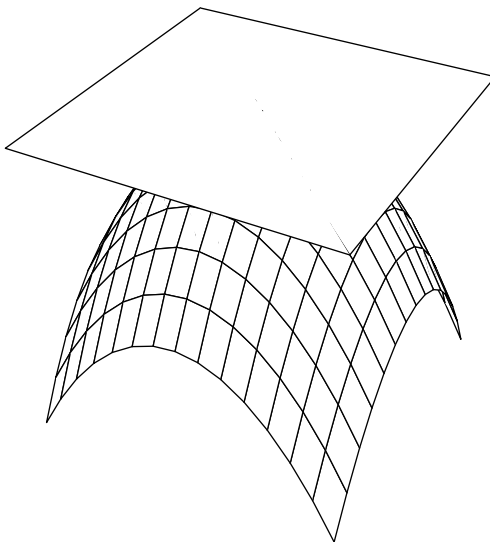
Dies ist der Grund, weshalb man  $\text{grad } f(\vec{x}_0)$  üblicherweise als Zeilenvektor schreibt.

### Anschauliche Deutung für $n = 2$

Die Fläche (Graph)  $z = f(x, y)$  wird in der Nähe von  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  durch die Ebene

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

mit einem Fehler  $o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$  approximiert. Diese Ebene heißt *Tangentialebene* der Fläche  $z = f(x, y)$  in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .



Die Tangentialebene enthält alle Flächentangenten in dem Punkt.

**Satz 8.1.3 (stetig partiell diffbar  $\Rightarrow$  total diffbar)** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D$  partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen stetig, so ist  $f$  auf  $D$  total differenzierbar.*

**Beispiel 8.1.9**  $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ .

(a)  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ :

$$f(x, y) = 3 + (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Gleichung der Tangentialebene in  $(0, 0, 3)$ :  $z = 3$

(b)  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ :

$$f(x, y) = 1 + (-2, -2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}).$$

Gleichung der Tangentialebene in  $(1, 1, 1)$ :

$$z = 1 - 2(x-1) - 2(y-1).$$

**Bemerkung 8.1.1** Für eine erste Näherung wird der  $o$ -Anteil vernachlässigt und  $f(\vec{x})$  in der Nähe von  $\vec{x}_0$  durch  $f(\vec{x}_0) + \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$  ersetzt:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0).$$

## 8.2 Richtungsableitung

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$  geben die Änderung der Funktionswerte in Richtung der Koordinatenachsen (d.h. in  $\vec{e}_i$ -Richtung) an. Allgemeiner definiert man:

**Definition** Es sei  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\vec{v}| = 1$ . Dann heißt der Grenzwert

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v}) - f(\vec{x})}{t}$$

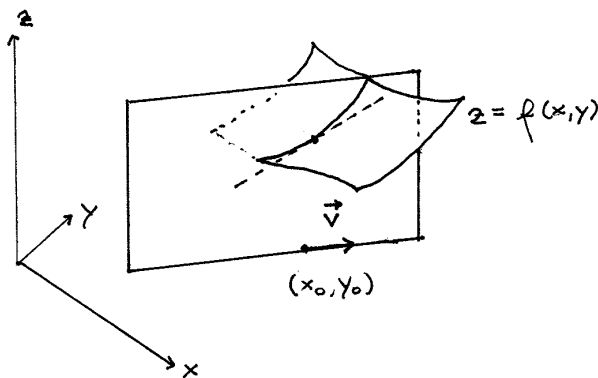
(falls er existiert) die *Richtungsableitung* (oder der *Anstieg*) von  $f$  an der Stelle  $\vec{x}$  in Richtung  $\vec{v}$ .

**Notation** Andere Bezeichnungen:  $D_{\vec{v}} f(\vec{x})$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x})$ .

### Anschauliche Deutung für $n = 2$

Betrachte die Schnittkurve des Graphen  $z = f(x, y)$  mit der zur  $z$ -Achse parallelen Ebene durch die Gerade

$$\vec{x}_0 + t\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{v}| = 1.$$



Diese Kurve besitzt die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + tv_1 \\ y_0 + tv_2 \\ f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialvektor im Punkte  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  lautet:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \partial_{\vec{v}}f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Die Tangente hat die Steigung  $\partial_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ .

### Physikalische Deutung

Wir betrachten eine ebene Platte mit einer Druckverteilung  $p = f(x, y)$  und einen Querschnitt durch die Platte durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ . Die momentane Druckänderung längs dieses Querschnitts in  $(x_0, y_0)$  wird durch  $\partial_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$  gegeben.

**Satz 8.2.1** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\vec{v}| = 1$ . Dann gilt*

$$\partial_{\vec{v}}f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) v_i$$

**Beispiel 8.2.1**  $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ .

Richtungsableitung im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ :

$$\partial_{\vec{v}}f(\vec{x}) = \text{grad } f(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = (-2, -2) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = -2(\cos \alpha + \sin \alpha).$$

**Bemerkung 8.2.1** Es gilt:

$$\partial_{\vec{v}}f(\vec{x}) > 0 \Rightarrow f \text{ steigt in Richtung } \vec{v} \text{ an.}$$

$$\partial_{\vec{v}}f(\vec{x}) < 0 \Rightarrow f \text{ fällt in Richtung } \vec{v} \text{ ab.}$$

**Satz 8.2.2 (Kettenregel)** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar,  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\vec{x} : [a, b] \rightarrow D$  ein Kurvenstück. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\vec{x}(t)) &= \frac{d}{dt}f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}(t))\dot{x}_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}(t))\dot{x}_n(t) \\ &= \text{grad } f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \end{aligned}$$

**Beispiel 8.2.2 (Koordinatentransformationen)****(a) Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$** 

Durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

geht die Funktion  $f(x, y)$  über in die Funktion  $F(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ .

Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}F_r &= (f_x, f_y) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi \\F_\varphi &= (f_x, f_y) \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} = f_x(-r \sin \varphi) + f_y(r \cos \varphi)\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Auflösen nach  $f_x$  und  $f_y$ :

$$\boxed{\begin{aligned}f_x &= F_r \cos \varphi - \frac{1}{r} F_\varphi \sin \varphi \\f_y &= F_r \sin \varphi + \frac{1}{r} F_\varphi \cos \varphi\end{aligned}}$$

Man rechnet weiter aus:

$$F_{rr} = f_{xx} \cos^2 \varphi + 2f_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + f_{yy} \sin^2 \varphi$$

$$\begin{aligned}F_{r\varphi} &= \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ (f_x, f_y) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right] \\&= \left( \frac{\partial f_x}{\partial \varphi}, \frac{\partial f_y}{\partial \varphi} \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (f_x, f_y) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\&= (f_{xx}(-r \sin \varphi) + f_{xy}(r \cos \varphi)) \cos \varphi \\&\quad + (f_{yx}(-r \sin \varphi) + f_{yy}(r \cos \varphi)) \sin \varphi - f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi \\&= f_{xx}(-r \sin \varphi \cos \varphi) + f_{xy}r(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + f_{yy}(r \sin \varphi \cos \varphi) \\&\quad - f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{\varphi\varphi} &= \left( \frac{\partial f_x}{\partial \varphi}, \frac{\partial f_y}{\partial \varphi} \right) \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} + (f_x, f_y) \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix} \\&= (f_{xx}(-r \sin \varphi) + f_{xy}(r \cos \varphi))(-r \sin \varphi) \\&\quad + (f_{yx}(-r \sin \varphi) + f_{yy}(r \cos \varphi))r \cos \varphi - f_x r \cos \varphi + f_y r \sin \varphi \\&= f_{xx}(r^2 \sin^2 \varphi) + 2f_{xy}(-r^2 \sin \varphi \cos \varphi) + f_{yy}(r^2 \cos^2 \varphi) \\&\quad - f_x r \cos \varphi + f_y r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta f &:= f_{xx} + f_{yy} \quad (\text{Laplace-Operator}) \\ &= F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

(b) **Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$**

Die *Zylinderkoordinaten*  $(r, \varphi, z)$  eines Punktes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ z &= z \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) \rightarrow F(r, \varphi, z) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

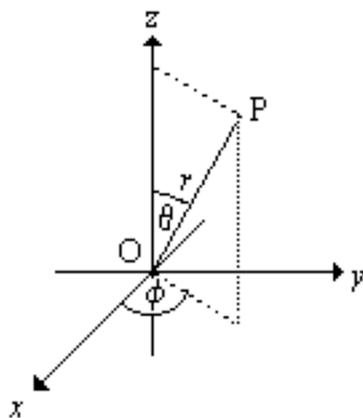
Wie in (a) berechnet man für den Laplace-Operator

$$\begin{aligned} \Delta f &:= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \quad (\text{Laplace-Operator}) \\ &= F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi} + F_{zz} \end{aligned}$$

(c) **Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$**

Die *Kugelkoordinaten*  $(r, \varphi, \theta)$  eines Punktes  $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$



$$f(x, y, z) \rightarrow F(r, \varphi, \theta) := f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

Für den Laplace-Operator kann man wie in (a) durch mehrfache Anwendung der Kettenregel und anschließendes Auflösen nach  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$ ,  $f_{zz}$  berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta f &:= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ &= F_{rr} + \frac{2}{r}F_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \cot \theta F_\theta \end{aligned}$$

Aus Satz 8.2.1 können wir die nachstehende Folgerung ziehen: Für eine total differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Anstieg im Punkt  $\vec{x} \in D$  in Richtung eines Vektors  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\vec{v}| = 1$ , gegeben durch

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = |\text{grad } f(\vec{x})| \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha$  den Winkel zwischen  $\text{grad } f(\vec{x})$  und  $\vec{v}$  bezeichnet. Dieser Anstieg ist am Größten für  $\cos \alpha = 1$ , d.h. für  $\alpha = 0$ . Also gilt für  $\text{grad } f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ :

Der Gradient zeigt in die Richtung des größten Anstiegs der Funktion.

**Beispiel 8.2.3**  $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ .

$$\text{grad } f(1, 1) = (-2, -2).$$

Es sei weiterhin  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Niveaumenge

$$N_c = \{\vec{x} \in D \mid f(\vec{x}) = c\} \subseteq D.$$

Dies ist eine Hyperfläche in  $D$ . Betrachte eine Kurve auf  $N_c$  mit der Parameterdarstellung  $t \mapsto \vec{x}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Dann gilt

$$f(\vec{x}(t)) = c \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Mit der Kettenregel (Satz 8.2.2) folgt:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \text{grad } f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = 0.$$

Das bedeutet:

Der Gradient steht senkrecht auf der Niveaumenge

Wir sehen uns an, was das im Einzelnen für  $n = 2$  und  $n = 3$  bedeutet.

$n = 2$ : In jedem Punkt  $(x_0, y_0)$  der Niveaukurve  $f(x, y) = c$  steht  $\text{grad } f(x_0, y_0)$  senkrecht auf der Kurventangente. Für  $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$  erhält man damit die

**Normalengleichung der Tangente an die Niveaukurve  $f(x, y) = c$  in  $(x_0, y_0)$ :**

$$\boxed{f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0}$$

**Spezialfall:**  $f(x, y) = y - g(x) = 0$ :

$$y - y_0 - g'(x_0)(x - x_0) = 0$$

ist die Tangente an den Graphen  $y = g(x)$  in  $x_0$ .

**Beispiel 8.2.4** Die Tangente an den Kreis  $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  hat die Gleichung

$$\begin{aligned} 2(x_0 - u)(x - x_0) + 2(y_0 - v)(y - y_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_0 - u)((x - u) - (x_0 - u)) + (y_0 - v)((y - v) - (y_0 - v)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_0 - u)(x - u) + (y_0 - v)(y - v) &= r^2 \end{aligned}$$

$n = 3$ : In jedem Punkt  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  der Niveaufläche  $f(\vec{x}) = f(x, y, z) = c$  steht  $\text{grad } f(\vec{x}_0)$  senkrecht auf allen Tangenten an die Fläche im Punkt  $\vec{x}_0$ . Die Ebene, die von den Tangenten an die Fläche in einem Punkt aufgespannt wird, heißt *Tangentialebene* an die Fläche in diesem Punkt. Für  $\text{grad } f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$  erhält man die

**Normalengleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche  $f(x, y, z) = c$  in  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ :**

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

oder

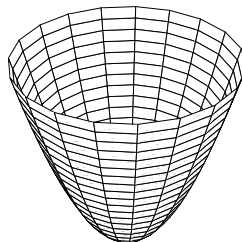
$$\boxed{f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$$

**Spezialfall:**  $f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$ :

$$z - z_0 = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ist die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen  $z = g(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  (s.o.)



**Beispiel 8.2.5** Das *elliptische Paraboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0 \quad (p \neq 0)$$

hat in  $(x_0, y_0, z_0)$  die Tangentialebene

$$\begin{aligned} \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} - p(z - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - p(z + z_0) &= 0 \end{aligned}$$

**8.3 Lokale Extremwerte**

Wir wollen nun auch die *Taylor-Formel* verallgemeinern. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Funktion von zwei Veränderlichen. Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar,  $\vec{x}_0 \in D$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Wir betrachten die Funktion

$$h(t) := f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Wenn  $t$  von 0 nach 1 läuft, durchläuft  $\vec{x}_0 + t\vec{v}$  die ganze Verbindungsstrecke von  $\vec{x}_0$  und  $\vec{x}_0 + \vec{v}$ . Damit  $h$  überall definiert ist, muss diese Verbindungsstrecke ganz in  $D$  liegen. Deswegen setzen wir voraus, dass  $D$  ein *konvexes Gebiet* ist, d.h.

1.  $D$  ist offen.
2. Mit je zwei Punkten  $\vec{x}, \vec{y} \in D$  liegt auch die Verbindungsstrecke  $\{\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) \mid t \in [0, 1]\}$  ganz in  $D$ .

Die Taylor-Formel für  $h(t)$  an der Stelle  $t = 0$  (mit  $t = 1$ ) lautet

$$h(1) = h(0) + \dot{h}(0) + \frac{1}{2!}\ddot{h}(0) + \dots + \frac{1}{k!}h^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}h^{(k+1)}(\tau_k)$$

mit  $\tau_k$  zwischen 0 und 1. Die Ableitungen  $h^{(k)}(0)$  berechnet man mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} h(1) &= f(\vec{x}_0 + \vec{v}), & h(0) &= f(\vec{x}_0), \\ \dot{h}(t) &= \text{grad } f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \cdot \vec{v}, \\ \dot{h}(0) &= \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)v_2, \\ \ddot{h}(t) &= v_1 [\text{grad } f_x(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \cdot \vec{v}] + v_2 [\text{grad } f_y(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \cdot \vec{v}], \\ \ddot{h}(0) &= v_1 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}_0)v_2 \right] + v_2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)v_2 \right] \\ &= v_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + 2v_1v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) + v_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Wir können  $\dot{h}(0)$  und  $\ddot{h}(0)$  vereinfacht folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{h}(0) &= \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) f(\vec{x}_0) \\ \ddot{h}(0) &= \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Damit erhält man allgemein:

$$h^{(k)}(0) = \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(\vec{x}_0).$$

Setzt man diese Werte oben ein, so erhält man

**Satz 8.3.1 (Taylor-Formel für 2 Variable)** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein konvexes Gebiet,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion,  $\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{v} \in D$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(x_0 + v_1, y_0 + v_2) &= f(x_0, y_0) + \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{k!} \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) + R_k(\vec{x}_0, \vec{v}) \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$R_k(\vec{x}_0, \vec{v}) = \frac{1}{(k+1)!} \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^{k+1} f(x_0 + \tau_k v_1, y_0 + \tau_k v_2)$$

mit  $\tau_k \in [0, 1]$ .

Setzen wir  $\vec{x} := \vec{x}_0 + \vec{v}$ , so nennt man das Polynom

$$\begin{aligned} T_k(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{k!} \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

das  $k$ -te Taylor-Polynom von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ . Dieses Polynom approximiert  $f(x, y)$  bis auf den Fehler

$$R_k(\vec{x}_0, \vec{v}) = f(x, y) - T_k(x, y),$$

für den gilt

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \frac{R_k(\vec{x}_0, \vec{v})}{|\vec{v}|^k} = 0.$$

Also gilt

$$f(x, y) = T_k(x, y) + o((\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})^k).$$

Das Taylorpolynom lautet in den Spezialfällen  $k = 0, 1, 2$  wie folgt:

$$T_0(x, y) = f(x_0, y_0)$$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &\quad + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \\ &= f(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x_0, y - y_0) \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix

$$H_f(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

nennt man auch die *Hesse-Matrix* von  $f$  in  $(x_0, y_0)$ . Sie ist nach Satz 8.1.1 symmetrisch.

Wir wollen nun Anwendungen der Taylor-Formel darstellen. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen interessiert man sich für die *Extremwerte* einer Funktion mehrerer Veränderlicher. Völlig analog zum Fall einer Funktion einer Variablen definiert man:

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ein Punkt  $\vec{a} \in D$  heißt eine *lokale* (oder *relative*) *Maximumstelle* (bzw. *Minimumstelle*) von  $f$ , wenn es eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < \varepsilon\}$  von  $\vec{a}$  gibt, so dass für alle  $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{a}) \cap D$  gilt:

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \quad (\text{bzw. } f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})).$$

Der Punkt  $\vec{a}$  heißt *globale* (oder *absolute*) *Maximum-* (bzw. *Minimumstelle*), wenn

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \quad (\text{bzw. } f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}))$$

für alle  $\vec{x} \in D$  gilt. Die Zahl  $f(\vec{a})$  heißt dann je nachdem lokales oder globales *Maximum* oder *Minimum*. Ein *Extremum* oder *Extremwert* ist ein Maximum oder Minimum.

Eine typische Aufgabe der angewandten Analysis ist die Bestimmung der Extremalstellen einer Funktion  $f(\vec{x})$  auf einem Bereich  $D$ :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \text{Extr!} \quad (\vec{x} \in D) \\ (\text{bzw. } f(\vec{x}) &= \text{max!}, \quad f(\vec{x}) = \text{min!}) \end{aligned}$$

Die Extremalstellen können nun im Innern oder auf dem Rand von  $D$  liegen. Für diese beiden Fälle benutzt man unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der Extremalstellen. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die lokalen Extremalstellen im Innern von  $D$  liegen.

**Satz 8.3.2 (Lokale Extrema im Innern von  $D$ )** Ist  $f : U_\varepsilon(\vec{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , total differenzierbar, so gilt

$$\boxed{\vec{a} \text{ ist lokale Extremalstelle von } f \Rightarrow \text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}}$$

**Definition** Ein Punkt  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  heißt *stationärer Punkt* von  $f$ , wenn

$$\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$$

gilt.

Nach Satz 8.3.2 muss man die inneren lokalen Extremalstellen unter den stationären Punkten suchen. Aber:

**Warnung** Nicht jeder stationäre Punkt ist eine Extremalstelle! Es gibt auch *Sattelpunkte*: Auch dort ist die Tangentialebene waagrecht.

Wir leiten nun einen Extremstellentest her. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall  $n = 2$ . Wir betrachten zunächst drei Beispiele.

**Beispiel 8.3.1** (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Also ist der einzige kritische Punkt der Nullpunkt. Wegen  $f(0, 0) = 0$  und  $f(x, y) \geq 0$  hat die Funktion in diesem Punkt ein lokales (sogar ein globales) Minimum (vgl. Abb. 8.1). Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ .

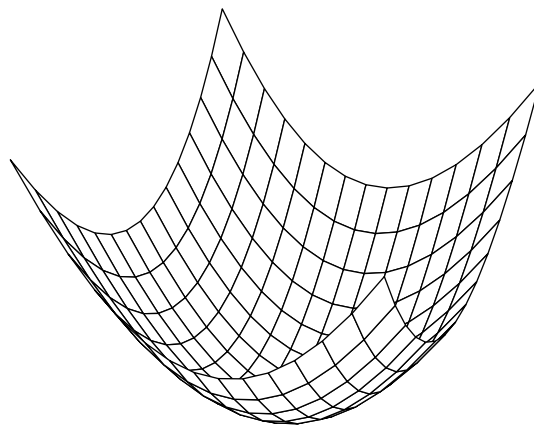


Abbildung 8.1: Der Graph der Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$

Wie in (a) sehen wir, dass der einzige kritische Punkt der Nullpunkt ist.

Wegen  $f(0,0) = 0$  und  $f(x,y) \leq 0$  hat die Funktion in diesem Punkt ein lokales (sogar ein globales) Maximum. Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c)  $f(x,y) = x^2 - y^2$ .

Wie in (a) sehen wir wieder, dass der Nullpunkt der einzige kritische Punkt ist. Es gilt wieder  $f(0,0) = 0$ . Berechnen wir Werte von  $f$  in der Umgebung des Nullpunkts, dann stellen wir fest:  $f(x,0) \geq 0$  und  $f(0,y) \leq 0$ . Da  $x$  und  $y$  beliebig klein gewählt werden können, kann der Nullpunkt weder eine lokale Maximum- noch eine lokale Minimumstelle sein. Es handelt sich um einen *Sattelpunkt* (vgl. Abb. 8.2). Die Hesse-Matrix lautet

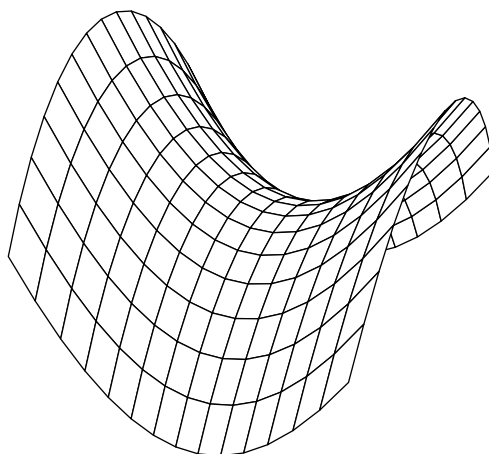


Abbildung 8.2: Der Graph der Funktion  $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d)  $f(x,y) = x^2$ .

Jeder Punkt auf der  $y$ -Achse ist ein lokales Minimum. Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e)  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + dy^2$  ( $a \neq 0$ )

Die Hesse-Matrix ist gerade die Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2d \end{pmatrix} =: 2A.$$

Wir nehmen folgende Koordinatentransformation vor:

$$\begin{aligned} x &= x' - by' \\ y &= ay' \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x', y') &= a(x' - by')^2 + 2b(x' - by')(ay') + d(ay')^2 \\ &= ax'^2 - 2abx'y' + ab^2y'^2 + 2abx'y' - 2ab^2y'^2 + a^2dy'^2 \\ &= ax'^2 + a(ad - b^2)y'^2 \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten lautet die Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a(ad - b^2) \end{pmatrix}, \quad ad - b^2 = \det A.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \det A > 0, a > 0 &\Rightarrow (0, 0) \text{ lokales Minimum} \\ \det A > 0, a < 0 &\Rightarrow (0, 0) \text{ lokales Maximum} \\ \det A < 0 &\Rightarrow (0, 0) \text{ Sattelpunkt} \\ \det A = 0 &\Rightarrow \text{eine Gerade von lokalen Extremstellen} \end{aligned}$$

Es sei nun  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine genügend oft differenzierbare Funktion. Es sei  $\vec{x}_0$  ein stationärer Punkt von  $f$ . Dann können wir  $f$  in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  näherungsweise durch das Taylorpolynom 2-ten Grades ersetzen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \end{aligned}$$

Aus Beispiel 8.3.1(e) folgt dann

**Satz 8.3.3 (Extremstellentest für 2 Variable)** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar,  $\vec{x}_0$  ein stationärer Punkt von  $f$ . Dann gilt*

(a)  $\det H_f(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$  lokale Minimumstelle.

(b)  $\det H_f(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$  lokale Maximumstelle.

(c)  $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$  Sattelpunkt.

**Beispiel 8.3.2**  $f(x, y) = x^3 - y^2 + 3x^2$ .

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2 + 6x, -2y),$$

$$\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0, -2y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (-2, 0).$$

Extremstellentest:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\det H_f(0, 0) < 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ Sattelpunkt}$$

$$\det H_f(-2, 0) = 12 > 0, -6 < 0 \Rightarrow (-2, 0) \text{ lokale Maximumstelle}$$

## 8.4 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Wir betrachten nun Extremwertaufgaben

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Extr!},$$

wobei die Menge der zulässigen Punkte  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  durch eine Nebenbedingung  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$  eingeschränkt ist.

**Notation**

$$f(\vec{x}) = \text{Extr!} \quad \text{NB: } g(\vec{x}) = 0.$$

Gesucht sind die Extrema von  $f(x)$  für diejenigen  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , für die  $g(\vec{x}) = 0$  ist.

**Beispiel 8.4.1** Aus einem kreisrunden Blech vom Radius 1 ist ein Rechteck maximalen Flächeninhalts auszuschneiden (vgl. Abb. 8.3). Bezeichnen wir die Seiten dieses Rechtecks mit  $2x$  und  $2y$ , so lautet die Aufgabe

$$f(x, y) = xy = \max! \quad \text{NB: } x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Um Extrema unter Nebenbedingungen zu bestimmen, gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten.



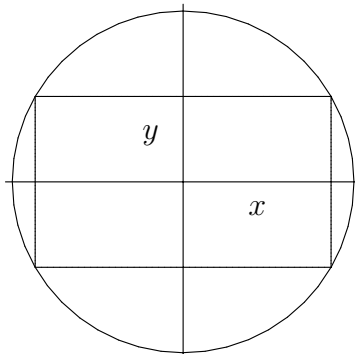


Abbildung 8.3: Zu Beispiel 8.4.1

### 1. Methode: Einsetzen

Man löst, falls möglich,  $g(x_1, \dots, x_n)$  nach einer Variablen auf, zum Beispiel nach  $x_n$ ,

$$x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

und setzt dies in die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  ein. Dann hat man eine Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen zu lösen:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = \text{Extr!}.$$

**Beispiel 8.4.2** In Beispiel 8.4.1 genügt es, die Extremwerte von  $f(x, y) = xy$  auf dem Halbkreis  $y = \sqrt{1 - x^2}$  zu bestimmen. Einsetzen in  $f(x, y)$  ergibt die Funktion

$$F(x) := x\sqrt{1 - x^2}.$$

Die kritischen Punkte von  $F$  sind die Lösungen der Gleichung

$$F'(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man als mögliche Extrempunkte auf dem Kreis  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, -\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, -\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Da  $f$  auf dem Kreis Maximal- und Minimalstellen hat, sind wegen  $f(\vec{a}) = f(-\vec{a}) = 1/2$  und  $f(\vec{b}) = f(-\vec{b}) = -1/2$  die Punkte  $\vec{a}$ ,  $-\vec{a}$  Maximalstellen und  $\vec{b}$ ,  $-\vec{b}$  Minimalstellen.

Die Lösung der Extremwertaufgabe ist daher, wie nicht anders erwartet, ein Quadrat der Seitenlänge  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## 2. Methode: Parametrisierung der Nebenbedingungen

Für  $n = 2$  zum Beispiel bestimmt man eine Parameterdarstellung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

der Kurve  $g(x, y) = 0$ . Dann hat man eine Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen zu lösen:

$$F(t) := f(x(t), y(t)) = \text{Extr!}$$

**Beispiel 8.4.3** In Beispiel 8.4.1 betrachtet man die Parameterdarstellung  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  des Kreises  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  und hat die Aufgabe

$$\cos t \sin t = \text{Extr!}$$

zu lösen.

## 3. Methode: Lagrange-Multiplikatorregel

Um die 3. Methode zu motivieren, versuchen wir, das Problem geometrisch zu lösen.

**Beispiel 8.4.4** Wir betrachten wieder Beispiel 8.4.1. Wir betrachten die Höhenlinien der Funktion  $f(x, y) = xy$  im Verhältnis zum Kreis  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Die Extremalstellen sind gerade die Stellen, an denen die Niveaulinien  $f(x, y) = c$  die Kurve  $g(x, y) = 0$  berühren (vgl. Abb. 8.4). An diesen Stellen sind die Vektoren  $\text{grad } f(x, y)$  und  $\text{grad } g(x, y)$  parallel, d.h. linear abhängig.

**Satz 8.4.1 (Lagrange-Multiplikator)** *Zu jeder Lösung  $\vec{a}$  des Extremalproblems*

$$f(\vec{x}) = \text{Extr!} \quad \text{NB: } g(\vec{x}) = 0$$

*mit  $f, g$  total differenzierbar und  $\text{grad } g(\vec{a}) \neq \vec{0}$  gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass gilt:*

$$\text{grad } f(\vec{a}) + \lambda \text{grad } g(\vec{a}) = \vec{0}.$$

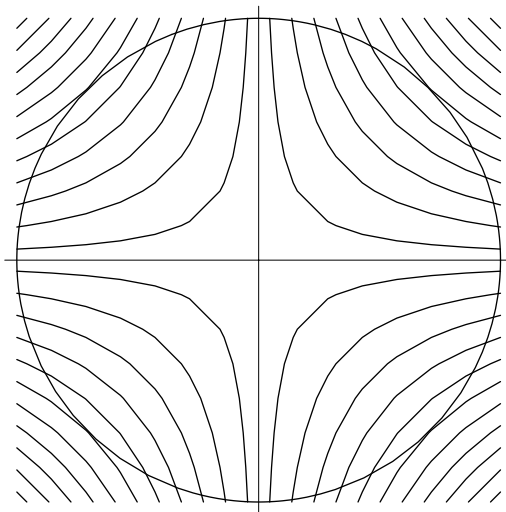


Abbildung 8.4: Zur Lagrange'schen Multiplikatorregel

**Definition** Die Zahl  $\lambda$  heißt *Lagrange-Multiplikator*.

Aus Satz 8.4.1 ergibt sich das folgende Lösungsverfahren:

### Lagrangesche Multiplikatorregel

1. *Schritt.* Man bildet die *Lagrangesche Hilfsfunktion*

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) := f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

und berechnet  $\text{grad } L(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ .

2. *Schritt.* Man bestimmt die Lösungen  $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$  des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= g(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

3. *Schritt.* Hat man in Schritt 2 die Lösung  $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$  gefunden, so untersucht man, ob  $(x_1, \dots, x_n)$  tatsächlich eine Extremalstelle ist.

**Beispiel 8.4.5** Wir betrachten wieder das Beispiel 8.4.1.

1. Schritt.

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

2. Schritt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt  $x = (-2\lambda)^2 x$ . Daraus folgt  $x = 0$  und  $y = 0$ , was im Widerspruch zur dritten Gleichung steht, oder  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ . Daraus folgt  $y = \pm x$ . Wir erhalten wieder die Lösungen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, -\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, -\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 8.4.6** Gesucht sind diejenigen Punkte der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

die von  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  den größten oder kleinsten Abstand haben (statt Abstand: Quadrat des Abstandes) (*Scheitelpunkte*):

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{Extr!} \quad \text{NB: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

1. Schritt.

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

2. Schritt.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (3)$$

Offenbar gilt  $\lambda \neq 0$  ( $\lambda = 0 \Rightarrow x = y = 0$  im Widerspruch zu (3)).

$$\begin{aligned}x = 0 &\Rightarrow y = \pm b \\y = 0 &\Rightarrow x = \pm a.\end{aligned}$$

Die Scheitelpunkte sind also  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(0, -b)$ .

Wir kommen nun noch einmal auf die Bestimmung von Extremwerten einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , zurück. Wir nehmen an, dass der Bereich  $D$  durch eine Kurve  $g(x, y) = 0$  begrenzt wird:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \leq 0\}.$$

Dann ergibt sich folgende Liste von

### Kandidaten für Extremstellen

- (a) Stationäre Stellen von  $f$  im Innern von  $D$ :  $g(x, y) < 0$ .
- (b) Extremstellen in der Randkurve von  $D$ : Extremwertproblem mit Nebenbedingung:

$$f(x, y) = \text{Extr!} \quad \text{NB: } g(x, y) = 0.$$

- (c) Punkte von  $D$ , in denen  $f$  nicht differenzierbar ist.

Durch Vergleich der Funktionswerte an diesen Stellen ermittelt man das globale Maximum bzw. Minimum von  $f$  auf  $D$ .

**Beispiel 8.4.7** Wir betrachten wieder die Funktion  $f(x, y) = x^3 - y^2 + 3x^2$ , nun auf der Kreisscheibe  $x^2 + y^2 \leq 16$ .

- (a) Die lokalen Extremstellen im Innern wurden bereits bestimmt:

$$\vec{a} = (-2, 0) \quad \text{lokale Maximumstelle}$$

- (b) Die Extremstellen auf dem Rand

$$f(x, y) = \text{Extr!} \quad \text{NB: } x^2 + y^2 - 16 = 0$$

bestimmen wir mit der Lagrangeschen Multiplikatorregel:

$$\begin{aligned}L(x, y, \lambda) &= x^3 - y^2 + 3x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 16) \\L_x &= 3x^2 + 6x + 2\lambda x = 0 \quad (1) \\L_y &= -2y + 2\lambda y = 0 \quad (2) \\L_\lambda &= x^2 + y^2 - 16 = 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Aus (2) folgt  $y = 0$  oder  $\lambda = 1$ .

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = -\frac{8}{3}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 4$$

$$x = -\frac{8}{3} \Rightarrow y^2 = 16 - \frac{64}{9} = \frac{80}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

Extremstellen:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\vec{b}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad -\vec{c}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Funktionswerte:

$$f(\vec{a}) = 4,$$

$$f(\vec{b}) = 112, \quad f(-\vec{b}) = -16,$$

$$f(\vec{c}) = f(-\vec{c}) = -16,$$

$$f(\vec{d}) = f(\vec{e}) = -\frac{176}{27}.$$

Ergebnis:

Globales Maximum in  $\vec{b}$ :  $f(\vec{b}) = 112$

Globales Minimum in  $-\vec{b}, \vec{c}, -\vec{c}$ :  $f(-\vec{b}) = f(\vec{c}) = f(-\vec{c}) = -16$ .

# Kapitel 9

## Integration im $\mathbb{R}^n$

### 9.1 Integration über Bereiche

Wir wollen nun Funktionen mehrerer Veränderlicher integrieren. Wir betrachten zunächst den Fall  $n = 2$ .

Wir beschränken uns bei den Mengen, über die wir integrieren wollen, auf reguläre Bereiche:

**Definition** Ein Bereich  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt *regulär*, wenn gilt:

- (a) Der Rand  $\partial B$  besteht aus endlich vielen regulären Kurvenstücken.
- (b)  $B$  ist nicht leer und *zusammenhängend*, d.h. je zwei Punkte  $\vec{x}_0$  und  $\vec{x}_1$  aus  $B$  lassen sich durch eine reguläre Kurve  $\vec{x}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $\vec{x}(a) = \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}(b) = \vec{x}_1$ , verbinden.
- (c)  $B$  ist beschränkt und abgeschlossen.

Es sei  $B$  ein regulärer Bereich. Wir wollen nun zunächst den Flächeninhalt von  $B$  bestimmen. Dazu zerlegen wir die  $(x, y)$ -Ebene durch ein Gitter achsenparalleler Geraden

$$x = \frac{1}{2^k}n, \quad y = \frac{1}{2^k}n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

in Quadrate mit dem Flächeninhalt  $\frac{1}{2^{2k}}$ . Es sei

- $s_k(B)$  = Flächeninhalt aller Quadrate, die samt Rand ganz in  $B$  liegen
- $S_k(B)$  = Flächeninhalt aller Quadrate, die mindestens einen Punkt von  $B$  enthalten

Man kann zeigen, dass für einen regulären Bereich gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(B).$$

Wir definieren daher

**Definition** Der *Flächeninhalt* von  $B$  ist

$$F(B) := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(B).$$

Es sei nun  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte stetige, nicht negative Funktion.

**Ziel:** Berechnung des Volumens des säulenförmigen Körpers, der von der  $(x, y)$ -Ebene und dem Graphen von  $f$  begrenzt wird.

Dazu zerlegen wir  $B$  durch ein Netz regulärer Kurven in  $n$  reguläre Teilbereiche  $B_1, \dots, B_n$ . Jedes  $B_i$  hat einen Flächeninhalt

$$\Delta F_i := F(B_i).$$

Wir wählen nun für jedes  $i = 1, 2, \dots, n$  einen beliebigen Punkt  $(x_i, y_i) \in B_i$ . Das Volumen der zylindrischen Säule über  $B_i$  mit der Höhe  $f(x_i, y_i)$  ist

$$f(x_i, y_i) \Delta F_i.$$

Dann bilden wir die Riemannsche Summe aller dieser Säulenvolumina

$$Z_n := \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta F_i.$$

$Z_n$  ist eine Approximation für das zu berechnende Volumen, die um so besser ist, je feiner das Netz gewählt wurde.

Ähnlich wie bei dem einfachen Integral (I, § 5) kann man zeigen, dass bei ständiger Verfeinerung des Netzes die Riemannschen Summen  $Z_n$  gegen das Volumen als Grenzwert konvergieren. Dieser Grenzwert ist unabhängig davon, wie die Zerlegungen und Zwischenpunkte  $(x_i, y_i) \in B_i$  gewählt wurden.

**Definition** Der Grenzwert wird mit

$$\iint_B f(x, y) dF \text{ oder } \iint_B f dF$$

bezeichnet und heißt *Doppelintegral* (*Gebietsintegral*, kurz: *Integral*) von  $f$  über  $B$ . Das Symbol  $dF$  heißt *Flächenelement*.

$$\boxed{\iint_B f(x, y) dF := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta F_i}$$



Die Voraussetzung  $f(x, y) \geq 0$  war nur für die Interpretation des Grenzwertes als Volumen erforderlich und kann fallen gelassen werden.

Für  $f(x, y) = 1$  ergibt sich der Flächeninhalt von  $B$ :

$$F = \iint_B dF \quad \text{Flächeninhalt von } B.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln.

### Rechenregeln

$$(a) \quad \iint_B (af + bg)dF = a \iint_B fdF + b \iint_B gdF, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{Linearität}).$$

$$(b) \quad f(x, y) \leq g(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in B \Rightarrow \iint_B fdF \leq \iint_B gdF$$

(Monotonie).

$$(c) \quad \iint_B fdF = \iint_{B_1} fdF + \iint_{B_2} fdF \quad (\text{Additivität}).$$

### Berechnung von Doppelintegralen

Dazu zerlegen wir die  $(x, y)$ -Ebene durch ein achsenparalleles Rechtecksgitter mit den Maschenweiten  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und Flächeninhalt einer Masche  $\Delta F = \Delta x \Delta y$ . Wir schreiben

$$\iint_B f(x, y) dx dy := \iint_B f(x, y) dF$$

für das Integral als Grenzwert der Riemannschen Summen bezüglich derartiger Zerlegungen.  $dF = dx dy$  heißt das *Flächenelement in kartesischen Koordinaten*.

Wir betrachten nun eine spezielle Klasse von Integrationsbereichen, bei denen man die Berechnung des Doppelintegrals auf zwei nacheinander auszuführende Einfachintegrationen zurückführen kann.

**Definition**  $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt *Normalbereich erster Art*, wenn es  $a, b \in \mathbb{R}$  und stetig differenzierbare Funktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $g(x) \leq h(x)$  und

$$B_1 = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

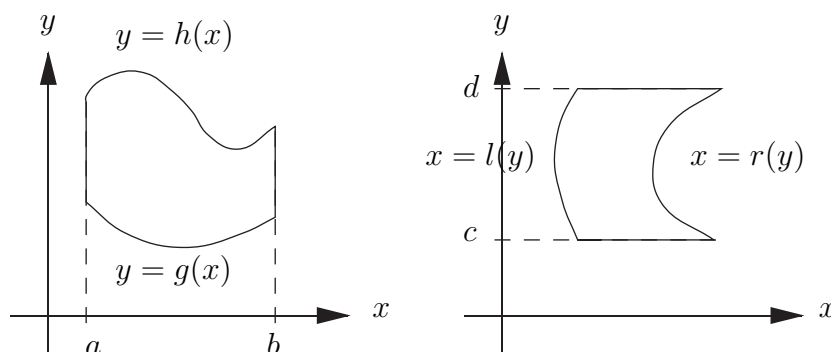


Abbildung 9.1: Normalbereiche erster und zweiter Art

$B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt *Normalbereich zweiter Art*, wenn es  $c, d \in \mathbb{R}$  und stetig differenzierbare Funktionen  $r, l : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $l(y) \leq r(y)$  und

$$B_2 = \{(x, y) \mid l(y) \leq x \leq r(y), c \leq y \leq d\}.$$

### Satz 9.1.1 (Integration über Normalbereiche)

- (1) Für jede stetige Funktion  $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Normalbereich  $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  erster Art gilt

$$\iint_{B_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

- (2) Für jede stetige Funktion  $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Normalbereich  $B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  zweiter Art gilt

$$\iint_{B_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{l(y)}^{r(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Besitzt  $B$  sowohl eine Darstellung als Normalbereich erster als auch zweiter Art

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \\ &= \{(x, y) \mid l(y) \leq x \leq r(y), c \leq y \leq d\}, \end{aligned}$$

dann gilt

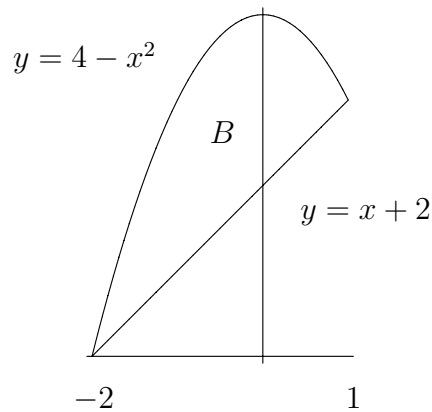
$$\iint_B f dF = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{l(y)}^{r(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Als Folgerung erhält man

**Satz 9.1.2 (Fubini)** Für ein Rechteck  $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  gilt

$$\iint_R f dF = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Beispiel 9.1.1** (1)  $\iint_B x dF$



$B$  ist Normalbereich erster Art,

$$B = \{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 1, x + 2 \leq y \leq 4 - x^2 \}.$$

Satz 9.1.1 (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \iint_B x dF &= \int_{-2}^1 \left( \int_{x+2}^{4-x^2} x dy \right) dx = \int_{-2}^1 [xy]_{y=x+2}^{y=4-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^1 (4x - x^3 - x^2 - 2x) dx = \int_{-2}^1 (2x - x^2 - x^3) dx \\ &= \left[ x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^1 = -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

(2) Volumen des Schnittes zweier Zylinder: Welches Volumen  $V$  hat der Schnitt der beiden Zylinder  $x^2 + y^2 = 1$  und  $x^2 + z^2 = 1$ ?

Es gilt

$$V = 8V_1,$$

wobei  $V_1$  das Volumen des auf dem Viertelkreis

$$B = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

stehenden Zylinderabschnitts mit Deckfläche  $z = \sqrt{1-x^2}$  ist.

Nach Satz 9.1.1 (1) gilt

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_B \sqrt{1-x^2} dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ \sqrt{1-x^2} y \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$V = 8V_1 = \frac{16}{3}.$$

### (3) Masse und Massenmittelpunkt

Man kann sich  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  auch als Belegungsfunktion eines ebenen Flächenstücks vorstellen, z.B. die Massendichteverteilung  $\mu : B \rightarrow \mathbb{R}$  einer Platte  $B$ . Die *Masse* der Platte  $B$  ist dann

$$M = \iint_B \mu(x, y) dF.$$

Als *Massenmittelpunkt* (oder *Schwerpunkt*) der Platte  $B$  bezeichnet man den Punkt  $S = (x_S, y_S)$  mit

$$x_S = \frac{1}{M} \iint_B x \mu(x, y) dF, \quad y_S = \frac{1}{M} \iint_B y \mu(x, y) dF.$$

Bei konstanter Massendichteverteilung  $\mu(x, y) = \mu_0 (= \text{const.})$  erhält man den *geometrischen Schwerpunkt* des ebenen Flächenstücks  $B$ :

$$\begin{aligned} \bar{S} &= (\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{x} &= \frac{1}{\mu_0 F} \iint_B \mu_0 x dF = \frac{1}{F} \iint_B x dF, \\ \bar{y} &= \frac{1}{\mu_0 F} \iint_B \mu_0 y dF = \frac{1}{F} \iint_B y dF, \end{aligned}$$

wegen

$$M = \iint_B \mu_0 dF = \mu_0 \iint_B dF = \mu_0 F$$

mit

$$F = \iint_B dF,$$

also

$$F = \iint_B dF, \quad \bar{S} = (\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} = \frac{1}{F} \iint_B x dF, \quad \bar{y} = \frac{1}{F} \iint_B y dF$$

Für

$$B = \{(x, y) \mid -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

berechnet man:

$$\begin{aligned} F &= \iint_B dF = \int_{-r}^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-r}^r [y]_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx = r^2 \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{F} \iint_B x dx dy = \frac{1}{F} \int_{-r}^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x dy \right) dx \\ &= \frac{1}{F} \int_{-r}^r x \sqrt{r^2-x^2} dx = \frac{1}{F} \left[ -\frac{1}{3} (r^2-x^2)^{3/2} \right]_{-r}^r = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{F} \iint_B y dx dy = \frac{1}{F} \int_{-r}^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y dy \right) dx \\ &= \frac{1}{F} \int_{-r}^r \frac{1}{2} (r^2-x^2) dx = \frac{1}{2F} \left[ r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \frac{2}{2r^2\pi} \frac{4r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}. \end{aligned}$$

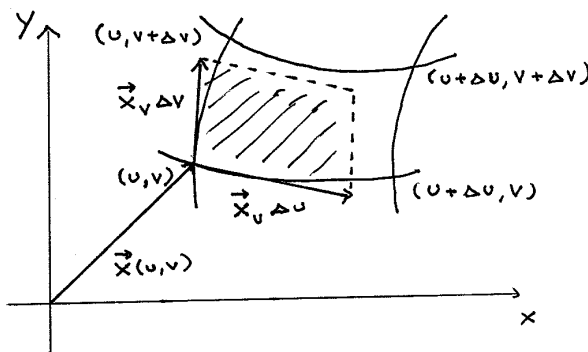
### Substitutionsregel (Transformationsformel) für Doppelintegrale

Genau wie bei einfachen Integralen ist auch bei Doppelintegralen die Einführung neuer Koordinaten oft zweckmäßig.

Es sei  $B$  ein regulärer Bereich. Es sei ein (eventuell krummliniges) Koordinatensystem  $(u, v)$  gegeben, welches mit den kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  durch Gleichungen der Form

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

verknüpft ist. Betrachte nun ein  $(u, v)$ -Koordinatennetz mit den Maschenweiten  $\Delta u, \Delta v$ . Wir wollen den Flächeninhalt einer Masche, das Flächenelement  $\Delta F$ , berechnen. Betrachte dazu ein Netzviereck



Es sei

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

der Ortsvektor zum Punkt  $(u, v)$ . Aufgrund der Interpretation der Ableitung als lineare Approximation gilt (wir setzen voraus, dass  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  hinreichend oft differenzierbare Funktionen sind):

$$\begin{aligned} \vec{x}(u + \Delta u, v) &\approx \vec{x}(u, v) + \vec{x}_u(u, v)\Delta u \\ \vec{x}(u, v + \Delta v) &\approx \vec{x}(u, v) + \vec{x}_v(u, v)\Delta v \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt  $\Delta F$  des Netzvierecks wird durch den Flächeninhalt des von den Vektoren  $\vec{x}_u(u, v)\Delta u$  und  $\vec{x}_v(u, v)\Delta v$  aufgespannten Parallelogramms approximiert:

$$\Delta F \approx |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \Delta u \Delta v.$$

Es gilt

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_u y_v - x_v y_u \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \left| \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right|.$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix}$$

wird auch *Funktionalmatrix* der Koordinatentransformation und ihre Determinante

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \left| \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} \right|$$

*Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante* genannt. Damit erhalten wir

$$\Delta F \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

Insgesamt ergibt sich:

**Satz 9.1.3 (Substitutionsregel, Transformationsformel)** *Der reguläre Bereich  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  entstehe unter der Koordinatentransformation  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  aus dem Bereich  $D$  der  $(u, v)$ -Ebene. Dann gilt für jede stetige Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_D f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

**Substitutionsregel:**

In  $\int_B f(x, y) dx dy$  ersetzt man

- $x, y$  durch  $x(u, v), y(u, v)$
- $dx dy$  durch  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$
- $B$  durch  $D$

**Spezialfall: Polarkoordinaten**

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \left| \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} \right| = r,$$

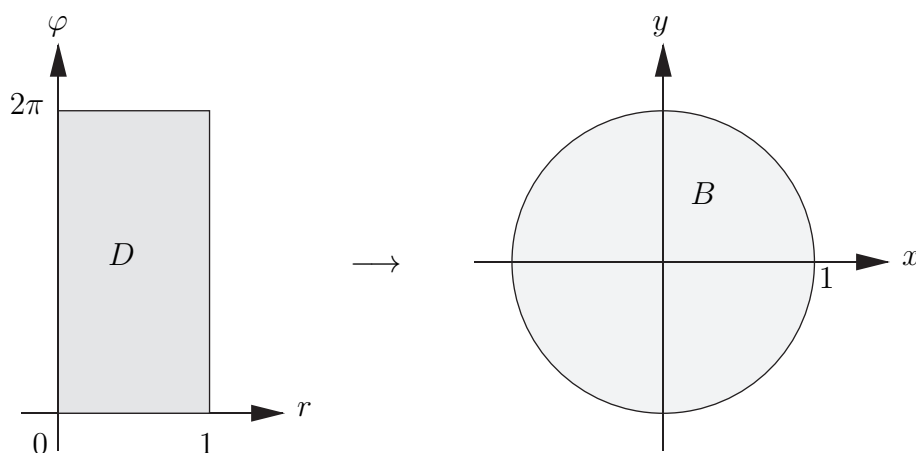


Abbildung 9.2: Die Polarkoordinatenabbildung

$$\boxed{\int \int_B f(x, y) dx dy = \int \int_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi}$$

**Beispiel 9.1.2** Volumen  $V$  des Kreiskegels über dem Einheitskreis von der Höhe 1: Der Kegel wird beschrieben durch

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Es ist

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ D &= \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} V &= \int \int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= \int \int_D (1 - r) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (1 - r) r dr \right) d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 (r - r^2) dr = 2\pi \left[ \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

### Dreifachintegrale

Der Begriff des Dreifachintegrals von Funktionen  $f(x, y, z)$  über Bereiche  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  lässt sich ganz analog wie im zweidimensionalen Fall einführen.



Dabei beschränkt man sich wieder auf *reguläre Bereiche*  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ , wobei dies heißen soll, dass der Rand  $\partial B$  aus endlich vielen regulären Flächenstücken besteht. Der genaue Begriff eines regulären Flächenstücks ist an dieser Stelle nicht wichtig, er wird später eingeführt.

Der Bereich  $B$  wird nun in einzelne reguläre räumliche Teilbereiche  $B_1, \dots, B_n$  mit den Volumina  $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$  zerlegt. Die Riemannsche Summe nimmt die Gestalt

$$Z_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

an.

**Definition** Der Grenzwert

$$\iiint_B f dV := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

heißt *Dreifachintegral* oder *Volumenintegral von  $f$  über  $B$* . Das Symbol  $dV$  heißt *Volumenelement*.

Für das Dreifachintegral gelten die üblichen Rechenregeln: Linearität, Monotonie, Additivität.

Bildet man die Riemannschen Summen bezüglich Schnittebenen parallel zu den drei Koordinatenebenen, dann bezeichnet man das Volumenintegral mit

$$\iiint_B f dx dy dz \text{ oder } \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz.$$

$dV = dx dy dz$  ist das Volumenelement bezüglich kartesischer Koordinaten.

Ist  $B$  ein Normalbereich, d.h. z.B.

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, l(x) \leq y \leq r(x), g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

dann folgt analog zu Satz 9.1.1

$$\boxed{\iiint_B f dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{l(x)}^{r(x)} \left( \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx}$$

Für den Fall eines Quaders

$$B = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$$

ergibt sich eine Verallgemeinerung von Satz 9.1.2 (Satz von Fubini): Die Integrationsreihenfolge ist beliebig, d.h.

$$\begin{aligned} \iiint_B f dx dy dz &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz = \dots \end{aligned}$$

**Beispiel 9.1.3 (1) Volumen** Das Volumen eines regulären Bereichs  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  ergibt sich als

$$V(B) = \iiint_B dV$$

Z.B. ergibt sich für den Zylinder  $B$  der Höhe  $h$  und Grundfläche  $D$  vom Radius  $r$

$$V(B) = \iiint_B dV = \int_0^h \left( \iint_D dF \right) dz = h \iint_D dF = h\pi r^2.$$

(2) **Masse, Schwerpunkt**

Masse:  $M = \iiint_B \rho dV$ , Massendichteverteilung:  $\rho$ ,

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \iiint_B x \rho(x, y, z) dV, \\ y_S &= \frac{1}{M} \iiint_B y \rho(x, y, z) dV, \\ z_S &= \frac{1}{M} \iiint_B z \rho(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

(Geometrischer Schwerpunkt:  $\rho = 1$ )

### Substitutionsregel (Transformationsformel) für Volumenintegrale

Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  ein regulärer räumlicher Bereich. Es sei ein (eventuell krummliniges) Koordinatensystem  $(u, v, w)$  gegeben, das mit den kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  durch Gleichungen der Form

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

in Verbindung steht. Wir setzen wieder voraus, dass die Funktionen  $x(u, v, w)$ ,  $y(u, v, w)$ ,  $z(u, v, w)$  hinreichend oft differenzierbar sind.

Betrachte nun ein  $(u, v, w)$ -Koordinatengitter mit den Maschenweiten  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ . Wir wollen das Volumen  $\Delta V$  eines von den Koordinatenflächen des Gitters ausgeschnittenen Gitterquaders berechnen. Diesen Gitterquader approximieren wir wieder wie im zweidimensionalen Fall linear durch einen Spat, der von den drei im Punkt  $\vec{x}(u, v, w)$  angetragenen Vektoren  $\vec{x}_u \Delta u$ ,  $\vec{x}_v \Delta v$ ,  $\vec{x}_w \Delta w$  aufgespannt wird. Das Volumen dieses Spats beträgt

$$\Delta V \approx |[\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_w]| \Delta u \Delta v \Delta w = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \Delta u \Delta v \Delta w$$

mit der *Funktionaldeterminante* (oder *Jacobi-Determinante*)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Insgesamt ergibt sich

**Satz 9.1.4 (Substitutionsregel, Transformationsformel)** *Der reguläre Bereich  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  entstehe unter der Koordinatentransformation  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  aus dem Bereich  $D$  des  $(u, v, w)$ -Raumes. Dann gilt für jede stetige Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} & \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_D f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

Man nennt

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

das *Volumenelement* bezüglich der  $(u, v, w)$ -Koordinaten.

### Spezialfälle

#### (1) Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & 0 \\ y_r & y_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

$$\boxed{\int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz}$$

## (2) Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} &= \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \\ z_r & z_\varphi & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= -r^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta - r^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos^2 \theta \\ &\quad - r^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \theta \\ &= -r^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta,$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz \\ = \int \int \int_D f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{aligned}}$$

**Beispiel 9.1.4** Volumen  $V$  der Kugel  $K$  vom Radius  $R$ :

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_K dx dy dz \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \quad (\text{Kugelkoordinaten}) \\ &= 2\pi \int_0^R r^2 \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) dr = 2\pi \frac{1}{3} R^3 [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

## Volumina von Rotationskörpern

Eine weitere Anwendung der Transformationsformel ist eine Regel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers:

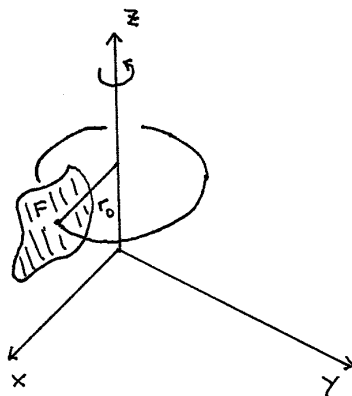
**Satz 9.1.5 (2. Regel von Guldin)** *Das Volumen eines Rotationskörpers beträgt*

$$V = 2\pi r_0 F$$

wobei

$F$  = Flächeninhalt eines Meridianschnitts

$r_0$  = Abstand des Flächenschwerpunkts von der Drehachse



## 9.2 Kurvenintegrale

Wir wollen den Integralbegriff nun auch dahingehend erweitern, dass wir eine Funktion über eine Kurve integrieren wollen.

Es sei

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b],$$

die Parametrisierung eines Kurvenstücks im  $\mathbb{R}^3$ . Wir betrachten eine skalare Belegungsfunktion  $f$  auf dem Kurvenstück, so dass  $t \mapsto f(\vec{w}(t))$  stetig ist. Im Kurvenpunkt  $\vec{w}(t)$  ist das Kurvenstück also mit der skalaren Größe  $f(\vec{w}(t))$  (z.B. Masse) belegt. Wir wollen nun die Gesamtbelegung berechnen. Dazu zerlegen wir das Kurvenstück durch Aufteilung des Parameterintervalls

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

in Bögen über  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $1 \leq i \leq n$ ) der Länge  $\Delta s_i$ . Nach der Berechnungsformel für die Bogenlänge gilt

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\vec{w}}(t)| dt = |\dot{\vec{w}}(\tau_i)| \Delta t_i$$

für ein  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$  nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Die Belegung des  $i$ -ten Bogens wird nun durch

$$f(\vec{w}(\tau_i))\Delta s_i = f(\vec{w}(\tau_i))|\dot{\vec{w}}(\tau_i)|\Delta t_i$$

approximiert, die Gesamtbelegung durch die Riemannsche Summe

$$Z_n = \sum_{i=1}^n f(\vec{w}(\tau_i))|\dot{\vec{w}}(\tau_i)|\Delta t_i.$$

Wegen der Stetigkeit von  $f$  konvergieren diese Riemannschen Summen für  $n \rightarrow \infty$  und  $\Delta t_i \rightarrow 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \int_a^b f(\vec{w}(t))|\dot{\vec{w}}(t)|dt.$$

Wir definieren daher:

**Definition** Die Zahl

$$\int_{\vec{w}} f ds := \int_a^b f(\vec{w}(t))|\dot{\vec{w}}(t)|dt$$

heißt das *Kurvenintegral* von  $f$  längs  $\vec{w}$ . Das Symbol  $ds = |\dot{\vec{w}}(t)|dt$  heißt das *Bogenelement* von  $\vec{w}$ .

Auch für Kurvenintegrale gelten die üblichen Rechenregeln: Linearität, Monotonie, Additivität.

**Beispiel 9.2.1** (1) **Bogenlänge.** Nach §7 gilt für die Länge  $L(\vec{w})$  eines Kurvenstücks  $\vec{w} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$L(\vec{w}) = \int_a^b |\dot{\vec{w}}(t)|dt = \int_{\vec{w}} ds$$

(2) **Masse.** Stellt  $\rho(x, y, z)$  die Massendichte einer Kurve  $\vec{w}$  (z.B. eines Seiles) dar, so beträgt die *Gesamtmasse*

$$M = \int_{\vec{w}} \rho ds.$$

Z.B. betrachten wir eine Schraubenfeder mit der Massendichte  $\rho(x, y, z) = x^2 y^2 + z^2$ .

Parameterdarstellung:

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 4\pi,$$

$$ds = |\dot{\vec{w}}(t)|dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{17}dt,$$

$$\begin{aligned} M &= \int_{\vec{w}} \rho ds = \int_{\vec{w}} (x^2 y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{4\pi} \left( (2 \cos t)^2 (2 \sin t)^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2 \right) \frac{1}{2} \sqrt{17} dt \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{17} \left[ 2t - \frac{\sin 4t}{2} + \frac{1}{12} t^3 \right]_0^{4\pi} = \frac{\sqrt{17}}{2} \left( 8\pi + \frac{16}{3} \pi^3 \right) \end{aligned}$$

Das Integral  $\int_{\vec{w}} f ds$  ist unabhängig von einer speziellen Parameterdarstellung:

**Satz 9.2.1** Sind  $\vec{w} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{u} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei Parameterdarstellungen des gleichen Kurvenstücks, dann gilt

$$\int_a^b f(\vec{w}(t)) |\dot{\vec{w}}(t)| dt = \int_c^d f(\vec{u}(t)) |\dot{\vec{u}}(t)| dt.$$

## 9.3 Oberflächenintegrale

Für verschiedene Anwendungen ist es wichtig, Flächeninhalte von Oberflächenstücken zu berechnen. Darüber hinaus spielen Integrale von Funktionen  $f(x, y, z)$  eine Rolle, bei denen die Integrationsbereiche Flächenstücke im  $\mathbb{R}^3$  sind. Das führt zu dem Begriff des Oberflächenintegrals, mit dem wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Dazu müssen wir zunächst Flächen betrachten. Wie bei Kurven haben wir verschiedenen Arten der Flächendarstellung. Bisher kennen gelernt haben wir:

- explizite Darstellung als Graph  $z = h(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , einer Funktion,
- implizite Darstellung als Niveauläche  $f(x, y, z) = c (= \text{const.})$ .

Daneben hat man auch für Flächen eine Parameterdarstellung.

**Definition** Es sei  $D$  ein regulärer Bereich der  $(u, v)$ -Ebene. Unter der Parameterdarstellung eines *regulären Flächenstücks* versteht man eine Funktion  $\vec{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Die Funktionen  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  besitzen stetige partielle Ableitungen.
- (b) Für beliebige Punkte  $(u, v) \neq (u', v')$  aus  $D$  ist stets  $\vec{x}(u, v) \neq \vec{x}(u', v')$ .
- (c)  $\vec{x}_u(u, v) \times \vec{x}_v(u, v) \neq 0$  für alle  $(u, v) \in D$ .

Die Punktmenge

$$S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in D\}$$

(und manchmal auch die Parameterdarstellung von  $S$ ) bezeichnet man als das dargestellte *reguläre Flächenstück*.

Nach (b) gibt es zu jedem Punkt  $(x, y, z) \in S$  genau einen Punkt  $(u, v)$  des *Parameterbereichs*  $D$  mit  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ .

Variiert man nur einen Parameter und hält den anderen fest, so erhält man zwei Kurvenscharen auf  $S$ :

$$\begin{aligned} u &\mapsto \vec{x}(u, v) \quad (v = \text{const.}) \quad \textit{Parameterlinie } v = \text{const.} \\ v &\mapsto \vec{x}(u, v) \quad (u = \text{const.}) \quad \textit{Parameterlinie } u = \text{const.} \end{aligned}$$

Die Vektoren

$$\vec{x}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

sind die Tangentialvektoren an die Parameterlinien. Die Voraussetzung (c) bedeutet, dass diese Tangentialvektoren in allen Punkten  $(u, v) \in D$  linear unabhängig sein sollen. Die *Tangentialebene* durch den Flächenpunkt  $\vec{x}(u, v)$  ist die von  $\vec{x}_u$  und  $\vec{x}_v$  aufgespannte Ebene mit der Parameterdarstellung

$$\vec{v}(\lambda, \mu) = \vec{x}(u, v) + \lambda \vec{x}_u(u, v) + \mu \vec{x}_v(u, v), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Der auf der Tangentialebene durch  $\vec{x}(u, v)$  senkrecht stehende Einheitsvektor

$$\vec{n} := \frac{1}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

heißt *Flächennormale* in  $\vec{x}(u, v)$ .



**Beispiel 9.3.1 (1) Graphen.** Parameterdarstellung eines Graphen  $z = h(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ :

$$\vec{x}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in D.$$

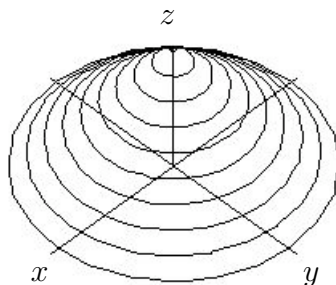
Die Parameterlinien sind die Schnitte mit den Ebenen  $x = \text{const.}$  bzw.  $y = \text{const.}$  Es gilt

$$\vec{x}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h_x \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h_y \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_x \times \vec{x}_y = \begin{pmatrix} -h_x \\ -h_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) **Drehflächen.** Wir drehen ein reguläres Kurvenstück ohne Doppelpunkte

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b$$

um die  $z$ -Achse.



Wir erhalten ein reguläres Flächenstück (Drehfläche) mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} x(t) \cos \varphi \\ x(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad (t, \varphi) \in D = \{(t, \varphi) \mid a \leq t \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Parameterlinien:

$$\begin{aligned} t = \text{const.} &: && \text{Breitenkreise} \\ \varphi = \text{const.} &: && \text{Meridiane} \end{aligned}$$

**Beispiele**

(a) **Kegel** (-Mantelfläche) der Höhe  $h_0$  über Grundkreis vom Radius  $R$

$$\vec{x}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} t \cos \varphi \\ t \sin \varphi \\ h_0 \left(1 - \frac{t}{R}\right) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

(b) **Zylinder** vom Radius  $r$

$$\vec{x}(z, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad z_0 \leq z \leq z_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

(c) **Sphäre** (Kugeloberfläche) mit Zentrum 0 und Radius  $r$

$$\vec{x}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Wir wollen nun stetige Funktionen  $f(x, y, z)$  über reguläre Flächenstücke integrieren.

Es sei  $\vec{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks  $S$ . Es sei  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die wir als Belegungsfunktion von  $S$  auffassen.

Wir zerlegen nun  $S$  durch ein Netz von Parameterlinien in  $n$  Teilstücke  $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$ . Wir betrachten nun ein solches Teilstück  $\Delta S$  vom Flächeninhalt  $\Delta O$ . Das Netzviereck  $\Delta S$  wird durch das Parallelogramm, das von den im Flächenpunkt  $\vec{x}(u, v)$  angetragenen Vektoren  $\vec{x}_u \Delta u, \vec{x}_v \Delta v$  aufgespannt wird, linear approximiert. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist

$$\Delta O \approx |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \Delta u \Delta v.$$

Nun betrachten wir wieder die obige Zerlegung von  $S$  in  $n$  Teilstücke  $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$ . In jedem Teilstück  $\Delta S_i$  wählen wir einen Punkt  $(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$ . Wir betrachten dann die Riemannsche Summe

$$Z_n = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) |\vec{x}_u^{(i)} \times \vec{x}_v^{(i)}| \Delta u \Delta v.$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| dudv.$$

Wir definieren daher:

**Definition** Die Zahl

$$\iint_S f dO := \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| dudv$$

heißt das *Oberflächenintegral* von  $f$  über  $S$ . Insbesondere heißt

$$O(S) := \iint_S dO = \iint_D |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| dudv$$

der *Flächeninhalt* des regulären Flächenstücks  $S$ . Das Symbol

$$dO = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| dudv$$

heißt das (skalare) *Flächenelement* (oder *Oberflächenelement*) von  $S$ .

Man kann wieder zeigen, dass das Integral  $\iint_S f dO$  unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist. Auch für das Oberflächenintegral gelten die üblichen Rechenregeln: Linearität, Monotonie, Additivität.

**Beispiel 9.3.2** (1) **Oberflächeninhalt eines Graphen**  $z = h(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$

$$O = \iint_D \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} dx dy.$$

(2) **Oberflächeninhalt einer Drehfläche**

$$\vec{x}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} x(t) \cos \varphi \\ x(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \cos \varphi \\ \dot{x}(t) \sin \varphi \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -x(t) \sin \varphi \\ x(t) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_t \times \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -x \dot{z} \cos \varphi \\ -x \dot{z} \sin \varphi \\ x \dot{x} \end{pmatrix},$$

$$O = \int \int_D \sqrt{x^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)} dt d\varphi = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

(3) **Oberfläche der Halbkugel** vom Radius  $r$ :

$$\vec{x}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Nach (2) gilt:

$$O = 2\pi \int_0^{\pi/2} r \sin \theta \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 2\pi r^2.$$

(4) **Oberfläche eines Kreiskegels**  $z = h_0 \left(1 - \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\right)$  Nach (1) gilt ( $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ )

$$\begin{aligned} O &= \int \int_D \sqrt{1 + \frac{h_0^2 x^2}{R^2(x^2 + y^2)} + \frac{h_0^2 y^2}{R^2(x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= \int_{-R}^R \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{1 + \frac{h_0^2}{R^2}} dy \right) dx = \pi R^2 \sqrt{1 + \frac{h_0^2}{R^2}}. \end{aligned}$$

Aus Beispiel 9.3.2 (2) leitet man ab:

**Satz 9.3.1 (1. Regel von Guldin)** *Der Oberflächeninhalt einer Drehfläche beträgt*

$$O = 2\pi r_0 \ell$$

wobei

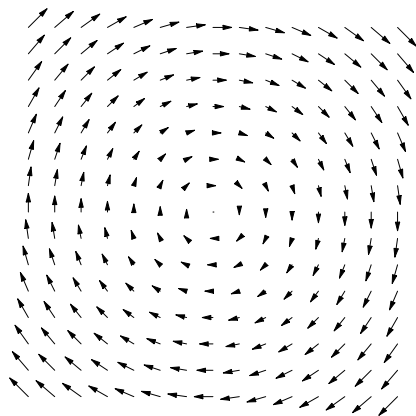
$\ell$  = Länge eines Meridianschnitts

$r_0$  = Abstand des Schwerpunkts eines Meridianschnitts von der Drehachse

## 9.4 Integralsätze

Die Integralsätze stellen eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung dar und sind für viele Anwendungen wichtig.

Wir betrachten zunächst Vektorfelder.

Abbildung 9.3: Ein Vektorfeld im  $\mathbb{R}^2$ 

**Definition** Ein *Vektorfeld* im  $\mathbb{R}^3$  ist eine Funktion  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , die jedem  $\vec{x} \in D$  einen Vektor

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zuordnet.

### Physikalische Deutung

An jeden Punkt  $\vec{x} \in D$  ist ein Kraftvektor  $\vec{v}(\vec{x})$  angeheftet.

**Definition** Eine Kurve in  $D$  heißt *Feldlinie* des Vektorfelds  $\vec{v}$ , wenn der Vektor  $\vec{v}(\vec{x})$  in jedem Kurvenpunkt  $\vec{x}$  parallel zur Kurventangente ist.

**Definition** Ein Vektorfeld  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *stetig* (bzw. *differenzierbar* bzw. *partiell differenzierbar*), wenn diese Eigenschaften für jede Komponentenfunktion  $v_i(\vec{x})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gelten.

Einer differenzierbaren skalaren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  kann man ein Vektorfeld  $\text{grad } f$  zuordnen:

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{x}) \\ f_y(\vec{x}) \\ f_z(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Statt  $\text{grad } f$  schreibt man auch  $\nabla f$  ( $\nabla = \text{Nabla}$ ).

Für Vektorfelder führen wir zwei Differentialoperatoren ein:

**Definition** (1) Die *Divergenz* eines Vektorfelds  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist das Skalarenfeld

$$\operatorname{div} \vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(\vec{x})$$

(2) Die *Rotation* eines Vektorfelds  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial z}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_1}{\partial z}(\vec{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

**Bequeme Operatorschreibweise**

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}, \quad \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v}.$$

**Rechenregeln**

- (a)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$ .
- (b)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$ .
- (c)  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f = \Delta f$ .
- (d)  $\operatorname{div}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div} \vec{v}$ .
- (e)  $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{v} + f \operatorname{rot} \vec{v}$ .
- (f)  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}$ .

Dabei ist  $\Delta$  der *Laplace-Operator*, der einem Skalarenfeld  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  das Skalarenfeld

$$\Delta f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{x}),$$

und einem Vektorfeld  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  das Vektorfeld

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

zuordnet. Es gilt

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

Wir wollen nun auch Vektorfelder längs Kurven integrieren.

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  offen,  $\vec{w} : [a, b] \rightarrow D$  eine reguläre Kurve und  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld. Man nennt

$$\int_{\vec{w}} \vec{v} \cdot d\vec{x} := \int_a^b \vec{v}(\vec{w}(t)) \cdot \dot{\vec{w}}(t) dt$$

das *Kurvenintegral von  $\vec{v}$  längs  $\vec{w}$* .

Ist  $\vec{w}$  geschlossen, d.h. der Anfangspunkt von  $\vec{w}$  ist gleich dem Endpunkt von  $\vec{w}$ , so schreibt man auch

$$\oint_{\vec{w}} \vec{v} \cdot d\vec{x}.$$

Mit

$$\vec{T}(t) := \frac{1}{|\dot{\vec{w}}(t)|} \dot{\vec{w}}(t)$$

gilt

$$\int_{\vec{w}} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \left( \vec{v}(\vec{w}(t)) \cdot \vec{T}(t) \right) |\dot{\vec{w}}(t)| dt = \int_{\vec{w}} (\vec{v} \cdot \vec{T}) ds.$$

**Beispiel 9.4.1** Die von einer Kraft  $\vec{K}$  im Kurvenpunkt  $\vec{w}(t)$  längs des Weges  $d\vec{x} = \dot{\vec{w}}(t) dt$  geleistete Arbeit beträgt

$$dA = \vec{K} \cdot d\vec{x} = (\vec{K} \cdot \vec{T}) ds.$$

*Gesamtarbeit* von  $\vec{K}$  längs  $\vec{w}$ :

$$A = \int_{\vec{w}} \vec{K} \cdot d\vec{x}.$$

Die Kurvenintegrale liefern ein Mittel, zu  $\text{grad } f$  eine Stammfunktion  $f$  zu rekonstruieren.

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet. Ein Vektorfeld  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt ein *Gradientenfeld* (oder *Potentialfeld*), wenn es eine stetig differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\vec{v}(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in D).$$

In diesem Fall heißt  $f$  (oder  $-f$ ) eine *Potentialfunktion* (oder ein *Potential*) von  $\vec{v}$ .

**Satz 9.4.1 (Hauptsatz über Kurvenintegrale)** *Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^3$  ein achsenparalleler Quader und  $\vec{v} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld mit in  $Q$  stetigen partiellen Ableitungen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *Das Vektorfeld  $\vec{v}$  ist ein Gradientenfeld.*
- (b)  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ .
- (c) *Das Kurvenintegral  $\int_{\vec{w}} \vec{v} \cdot d\vec{x}$  hängt für alle regulären Kurven  $\vec{w}$  in  $Q$  nur vom Anfangs- und Endpunkt von  $\vec{w}$  ab.*
- (d) *Für alle geschlossenen regulären Kurven  $\vec{w}$  in  $Q$  gilt*

$$\oint_{\vec{w}} \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0.$$

### Praktische Bestimmung eines Potentials

Gegeben sei  $\vec{v} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

- (1)  $\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) \neq \vec{0}$  für ein  $\vec{x} \in Q \Rightarrow$  kein Potential.
- (2)  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ : Wähle  $\vec{x}_0 \in Q$  fest. Zu  $\vec{x} \in Q$  wähle Kurve  $\vec{w}$  in  $Q$ , die  $\vec{x}_0$  mit  $\vec{x}$  verbindet. Setze

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\vec{x}) := \int_{\vec{w}} \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

besagt, dass es möglich ist, ein Integral auf einen Ausdruck zurückzuführen, in dem nur die Funktionswerte am Rande des Intervalls  $[a, b]$  auftreten. Entsprechend wollen wir nun Bereichsintegrale auf Randintegrale zurückführen.

Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ein regulärer Bereich, dessen Rand  $\partial B$  aus einer geschlossenen stückweise regulären Kurve  $\vec{w}$  besteht, die positiv orientiert ist. Setzt sich die Kurve  $\vec{w}$  aus den regulären Kurvenstücken  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$  zusammen, so definiert man

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{x} := \int_{\vec{w}_1} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \dots + \int_{\vec{w}_n} \vec{v} \cdot d\vec{x}.$$



**Satz 9.4.2 (Satz von Green)** Es seien  $B, \partial B$  wie beschrieben,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge mit  $B \subseteq D$  und  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig partiell differenzierbares ebenes Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int \int_B \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

**Beispiel 9.4.2** Mit  $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$  ergibt sich für den Flächeninhalt von  $B$

$$F = \int \int_B dx dy = \int_{\partial B} x dy = - \int_{\partial B} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (-y dx + x dy).$$

Wir definieren nun das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes.

**Definition** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $S$  ein durch die Parameterdarstellung  $\vec{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebenes reguläres Flächenstück mit Normale

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

und  $\vec{v}$  ein auf  $S$  stetiges Vektorfeld. Man nennt

$$\int \int_S \vec{v} \cdot d\vec{O} := \int \int_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO = \int \int_D [\vec{v}, \vec{x}_u, \vec{x}_v] dudv$$

das *Oberflächenintegral von  $\vec{v}$  längs  $S$*  oder den *Fluss von  $\vec{v}$  durch  $S$* .

$$d\vec{O} = \vec{n} dO = \vec{x}_u \times \vec{x}_v dudv$$

heißt *vektorielles Oberflächenelement* von  $S$ .

### Physikalische Deutung

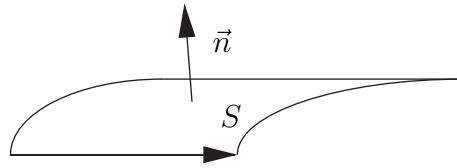
Es sei  $\vec{v}$  das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung. Dann ist

$$[\vec{v}, \vec{x}_u, \vec{x}_v] dudv = [\vec{v}, \vec{x}_u du, \vec{x}_v dv]$$

das Volumen der Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch das Oberflächenelement  $dO$  strömt und

$$\int \int_S \vec{v} \cdot d\vec{O}$$

das Gesamtvolumen der Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch  $S$  zu der Seite, zu der  $\vec{n}$  zeigt, hindurchströmt.

Abbildung 9.4: Orientierung des Randes  $\partial S$ 

**Satz 9.4.3 (Satz von Stokes)** *Es sei  $S$  ein reguläres Flächenstück mit einer geschlossenen stückweise regulären Randkurve  $\partial S$ , die in Bezug auf die Normalenrichtung  $\vec{n}$  positiv orientiert ist (vgl. Abbildung 9.4). Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Menge, die  $S$  enthält, und  $\vec{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}) dO$$

**Beispiel 9.4.3** Es sei  $S = \vec{x}(D) \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein ebenes Vektorfeld. Dann gilt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

also nach dem Satz von Stokes

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Damit folgt der Satz von Green aus dem Satz von Stokes.

### Physikalische Deutung des Satzes von Stokes

Es sei  $\vec{v}$  wieder das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung. Man nennt das Integral

$$\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

die *Zirkulation* (oder *Wirbelstärke*) der Flüssigkeit entlang  $\partial S$  (die Tangentialkomponente von  $\vec{v}$  wird aufintegriert). Der Satz von Stokes besagt, dass

die Zirkulation von  $\vec{v}$  entlang  $\partial S$  gleich dem Integral der Normalkomponente der Rotation  $\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}$  über  $S$  ist. Man nennt  $\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}(\vec{x})$  die *spezifische Zirkulation* (oder *Wirbeldichte*) der Strömung durch  $S$  in  $\vec{x}$ . Die Strömung heißt *wirbelfrei*, wenn  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  ist.

**Satz 9.4.4 (Satz von Gauß)** *Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  ein regulärer räumlicher Bereich mit einer geschlossenen Oberfläche  $\partial B$ , die aus endlich vielen regulären Flächenstücken besteht. Es sei  $\vec{n}$  die aus allen regulären Flächenstücken von  $\partial B$  nach außen weisende Normale,  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit  $B \subseteq U$ ,  $\vec{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\boxed{\int \int \int_B (\text{div } \vec{v}) dV = \int \int_{\partial B} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO}$$

### Physikalische Deutung des Satzes von Gauß

Es sei  $\vec{v}$  wieder das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung. Der Satz von Gauß besagt, dass der Fluß von  $\vec{v}$  durch die Körperoberfläche (von innen nach außen) gleich dem Volumenintegral der Divergenz  $\text{div } \vec{v}$  von  $\vec{v}$  ist. Die Divergenz misst also den aus der Volumeneinheit austretenden Fluß. Man nennt  $\text{div } \vec{v}(\vec{x})$  die *spezifische Ergiebigkeit* oder *Quelldichte* der Strömung in  $\vec{x}$ . Man nennt  $\vec{x}$  *Quelle*, wenn  $\text{div } \vec{v}(\vec{x}) > 0$  ist, und *Senke*, wenn  $\text{div } \vec{v}(\vec{x}) < 0$ . Die Strömung heißt *quellenfrei*, wenn  $\text{div } \vec{v} = 0$  ist.

Wir wollen nun Anwendungen der Integralsätze darstellen. Wir brauchen dazu noch ein Resultat über Parameterintegrale.

### Parameterintegrale

Ein Integral der Form

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

wobei der Integrand vom Parameter  $x$  abhängt, heißt ein *Parameterintegral*.

**Beispiel 9.4.4** Die Gammafunktion (vgl. I, Beispiel 5.4.3 (2))

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

ist ein Beispiel für ein Parameterintegral.

**Satz 9.4.5 (Differentiation unter dem Integralzeichen)** *Es sei*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

*ein abgeschlossenes Rechteck im  $\mathbb{R}^2$  und  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig partiell nach  $x$  differenzierbare Funktion. Dann ist die Integralfunktion*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad a \leq x \leq b,$$

*differenzierbar mit der Ableitung*

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

## Anwendungen der Integralsätze

### 1. Die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

Es sei

$\vec{v}$  Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit

$\rho$  Massendichte (auch abhängig von der Zeit)

$B$  regulärer räumlicher Bereich mit der Oberfläche  $S$

Durch das Oberflächenelement  $dO$  tritt pro Zeiteinheit das Flüssigkeitsvolumen

$$(\vec{v} \cdot \vec{n})dO$$

hindurch. Die gesamte durch  $S$  aus  $B$  herausströmende Masse beträgt also

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dO.$$

Die zeitliche Änderung der Masse wird auch durch

$$-\frac{d}{dt} \iiint_B \rho dV = - \iiint_B \frac{d\rho}{dt} dV$$

gegeben. Damit erhalten wir

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dO + \iiint_B \frac{d\rho}{dt} dV = 0.$$

Aus dem Satz von Gauß folgt

$$\iiint_B \left( \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{d\rho}{dt} \right) dV = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebige reguläre Bereiche  $B$  gilt, folgt daraus die *Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik*

$$\boxed{\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{d\rho}{dt} = 0}$$

Für eine *stationäre* (d.h. zeitunabhängige) Strömung gilt  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , also  $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ . Ist die Flüssigkeit *inkompressibel*, d.h.  $\rho = \text{const.}$ , dann folgt

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Das bedeutet, dass das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit quellenfrei ist.

## 2. Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten einen homogenen erwärmten Körper mit

$\rho$  konstante Massendichte

$\sigma$  konstante spezifische Wärme

$U = U(x, y, z, t)$  Temperatur zum Zeitpunkt  $t$  im Punkt  $(x, y, z)$

$k$  Wärmeleitfähigkeit des Materials

$B$  regulärer räumlicher Bereich mit der Oberfläche  $S$

Dann speichert ein Volumenelement  $dV$  die Wärmemenge

$$dW = \sigma U \rho dV.$$

Die Gesamtwärme in  $B$  beträgt

$$W = \iiint_B \rho \sigma U dV.$$

Für die zeitliche Änderung der Wärme (Wärmeaustausch) gilt

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_B \rho \sigma \frac{\partial U}{\partial t} dV.$$

Das Gesetz von Fourier besagt, dass der Wärmeaustausch  $\frac{dW}{dt}$  als Wärmefluss durch die Oberfläche  $S$  gedeutet werden kann:

$$\frac{dW}{dt} = \iint_S k(\text{grad}_{\vec{x}} U \cdot \vec{n}) dO, \quad \text{grad}_{\vec{x}} U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Aus dem Gesetz von Fourier und dem Satz von Gauß folgt damit

$$\iiint_B \rho \sigma \frac{\partial U}{\partial t} dV = \iiint_B k(\text{div grad}_{\vec{x}} U) dV.$$

Damit ergibt sich die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{\sigma \rho} \Delta_{\vec{x}} U}$$

mit

$$\Delta_{\vec{x}} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

### 3. Die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik

Ein elektromagnetisches Feld wird durch die folgenden vom Ort  $\vec{x}$  und von der Zeit  $t$  abhängigen Vektorfelder beschrieben:

$\vec{E}$  elektrische Feldstärke

$\vec{H}$  magnetische Feldstärke

$\vec{D}$  elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte)

$\vec{B}$  magnetische Induktion

$\vec{J}$  elektrische Stromdichte

Es sei  $S$  ein reguläres Flächenstück mit Rand  $C$ . Das Faradaysche Induktionsgesetz besagt

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dO.$$

Die Formel von Biot-Savart-Ampere-Maxwell besagt

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{x} = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dO + \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot \vec{n} dO.$$

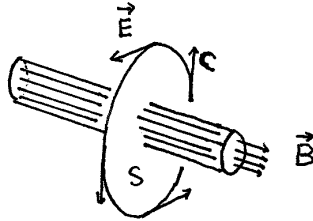


Abbildung 9.5: Zum Faradayschen Gesetz

Aus dem Satz von Stokes folgt

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} dO &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dO, \\ \iint_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{n} dO &= \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \cdot \vec{n} dO. \end{aligned}$$

Daraus folgen die ersten Maxwellgleichungen

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}.}$$

Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichungen den Operator  $\operatorname{div}$  an, so folgt hieraus wegen  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$  für alle Vektorfelder  $\vec{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \left( \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) = 0.$$

Das Coulomb-Gesetz besagt ( $\rho$  Ladungsdichte)

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Dass es keine freie magnetische Ladung gibt, besagt

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Daraus folgen schließlich die Kontinuitätsgleichungen:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.}$$

In homogenen Medien gilt

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

(Elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$ , Permittivität  $\varepsilon$ , Permeabilität  $\mu$ ). Damit erhält man die *Maxwellgleichungen für homogene Medien*:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} &= \vec{0}, & \text{div}(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}) &= 0, \\ \text{rot } \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, & \text{div } \vec{H} &= 0. \end{aligned}$$

Dies sind Bestimmungsgleichungen für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ .

Nun nehmen wir an, dass die Ladungsdichte  $\rho = 0$  ist, d.h.  $\text{div } \vec{E} = 0$ . Dann folgt durch Anwendung des Operators  $\text{rot}$  auf die erste Gleichung

$$\text{rot}\left(\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}\right) = -\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -(\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}) = \Delta \vec{E}$$

und durch Anwendung von  $\frac{\partial}{\partial t}$  auf die dritte Gleichung

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \text{rot } \vec{H} - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}.$$

Hieraus folgt die *allgemeine Wellengleichung* für  $\vec{E}$ :

$$\mu \varepsilon \vec{E}_{tt} + \sigma \mu \vec{E}_t = \Delta \vec{E}.$$

Entsprechend leitet man die *allgemeine Wellengleichung* für  $\vec{H}$  her:

$$\mu \varepsilon \vec{H}_{tt} + \sigma \mu \vec{H}_t = \Delta \vec{H}.$$

#### 4. Berechnung von Volumina

Man kann die Integralsätze auch anwenden, um Integrale, z.B. Volumina und Schwerpunkte, auszurechnen. Eine solche Anwendung wollen wir zum Abschluss betrachten.

**Beispiel 9.4.5** Wir wollen das Volumen  $V$  eines Kegelstumpfes  $B$  von der Höhe  $h$  und den Radien  $R$  und  $\tilde{R}$  ( $\tilde{R} < R$ ) berechnen (vgl. Abbildung 9.6).

Wir betrachten ein zur Mantelfläche  $M$  tangentiales Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ \frac{h}{R-\tilde{R}} \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$



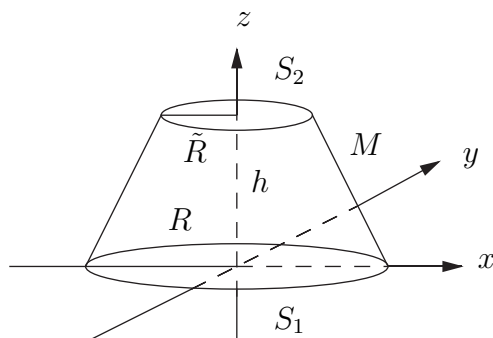


Abbildung 9.6: Kegelstumpf

Es gilt  $\operatorname{div} \vec{v} = -2$ . Nach dem Satz von Gauß gilt daher

$$-2V(B) = \int_{\partial B} \int (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO.$$

Der Rand  $\partial B$  besteht aus der Mantelfläche  $M$  und den beiden Deckelflächen  $S_1$  und  $S_2$ . Da  $\vec{v}$  tangential zu  $M$  ist, gilt  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  auf  $M$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{auf } S_1 : \vec{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \vec{v} \cdot \vec{n}(\vec{x}) &= -\frac{h}{R - \tilde{R}} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{auf } S_2 : \vec{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{v} \cdot \vec{n}(\vec{x}) &= \frac{h}{R - \tilde{R}} \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Parametrisierungen von  $S_1, S_2$ :

$$\begin{aligned} S_1 : x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & 0 &\leq r \leq R, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ S_2 : x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & 0 &\leq r \leq \tilde{R}, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

Es gilt

$$dO = r dr d\varphi.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} -2V &= \int_{S_1} \int -\frac{h}{R-\tilde{R}} \sqrt{x^2+y^2} dO + \int_{S_2} \int \frac{h}{R-\tilde{R}} \sqrt{x^2+y^2} dO \\ &= \frac{h}{R-\tilde{R}} \left( \int_{S_2} \int r^2 dr d\varphi - \int_{S_1} \int r^2 dr d\varphi \right) \\ &= \frac{h}{R-\tilde{R}} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\tilde{R}} r^2 dr d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\varphi \right) \\ &= \frac{2\pi h}{R-\tilde{R}} \left( \frac{1}{3} \tilde{R}^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) \\ &= -\frac{2}{3} \pi h (R^2 + R\tilde{R} + \tilde{R}^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R\tilde{R} + \tilde{R}^2).$$

# Kapitel 10

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 10.1 Spezielle Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der Ableitungen einer Funktion von einer Veränderlichen auftreten. Sie hat die allgemeine Form

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Die gesuchte Unbekannte ist hierbei die Funktion  $y(x)$ .

#### Beispiel 10.1.1 Radioaktiver Zerfall

Die zerfallende Menge einer radioaktiven Substanz  $y(t)$  in einer kleinen Zeitspanne  $\Delta t$  ist proportional zu der noch vorhandenen Substanz:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -C \cdot y(t), \quad C = \text{const.} > 0.$$

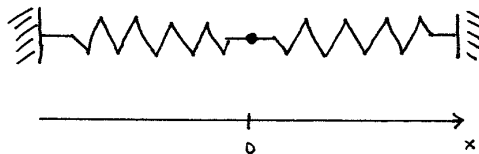
Damit erhält man die folgende Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{y}(t) = -C \cdot y(t)}$$

#### Beispiel 10.1.2 Schwingungen an einer Feder

Ein Massenpunkt der Masse  $m$  sei an zwei gleichlangen homogenen Federn zwischen zwei festen Wänden aufgehängt. (Von der Schwerkraft soll abgesehen werden.) Gesucht ist die zeitliche Veränderung der Auslenkung  $x = x(t)$  des Massenpunktes aus der Ruhelage  $x = 0$ , wenn er in Schwingung versetzt

wird.



Das Hookesche Gesetz besagt, dass die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist:

$$R_1 = k \cdot x, \quad k > 0 \text{ konstant.}$$

Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit:

$$R_2 = r \cdot \dot{x}, \quad r > 0 \text{ konstant.}$$

Nach Newton ist die Beschleunigung  $\ddot{x}$  proportional zur Kraft:

$$m \cdot \ddot{x} = -R_1 - R_2 = -k \cdot x - r \cdot \dot{x}.$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

**Definition** Eine Bestimmungsgleichung für  $y = y(x)$  der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung* (abgekürzt DGL) *n-ter Ordnung*. Eine *n*-mal differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lösung* der DGL auf *I*, wenn für alle  $x \in I$  gilt:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

### Beispiel 10.1.1

Eine Lösung der DGL  $y'(t) = -C \cdot y(t)$  ist

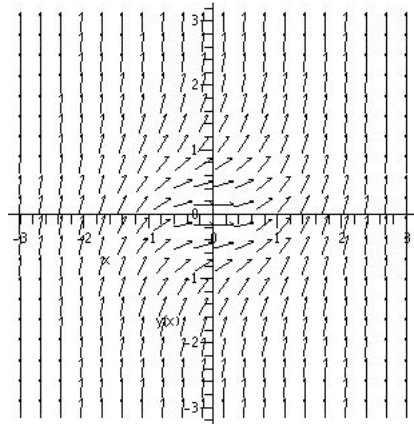
$$y(t) = c_0 e^{-Ct} \quad \text{für ein beliebiges } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Die Konstante  $c_0$  kann durch den Anfangswert  $y(0) = c_0$  festgelegt werden.

Das Problem

$$\begin{array}{l} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}$$

heißt *Anfangswertproblem* (abgekürzt AWP).

Abbildung 10.1: Richtungsfeld zu  $y' = x^2 + y^2$ **Beispiel 10.1.2**

In diesem Beispiel (Linearschwinger) lautet das Anfangswertproblem

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (\text{Anfangszustand})$$

(Vorgabe des Anfangsortes und der Anfangsgeschwindigkeit)

Wir wollen uns nun zunächst mit Differentialgleichungen 1. Ordnung befassen:

$$y' = f(x, y).$$

**Spezialfall**

$$y' = f(x).$$

Lösung ist einfache Integration:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + c, \quad x_0 \text{ fest, } c \in \mathbb{R}.$$

**Geometrische Interpretation**

Eine DGL  $y' = f(x, y)$  bestimmt ein *Richtungsfeld*: In jedem Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  wird durch  $y' = f(x, y)$  eine Steigung vorgegeben. Dies muss dann die Richtung der Tangente der Lösungskurve (*Integralkurve*) sein, die durch  $(x, y)$  verläuft.

Zur Konstruktion von Integralkurven sind auch die Isoklinen hilfreich. Die *Isoklinen* der DGL sind diejenigen Kurven in der  $(x, y)$ -Ebene, auf denen die Lösungen  $y(x)$  die gleiche Steigung  $c$  haben, also die Höhenlinien von  $f(x, y)$

$$f(x, y) = c.$$

**Beispiel 10.1.3** Das Richtungsfeld zu  $y' = x^2 + y^2$  ist in Abb. 10.1 dargestellt.

**Beispiel 10.1.4** Im Allgemeinen braucht durch einen Punkt  $(x, y)$  nicht nur eine Integralkurve hindurchzugehen:

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$$

Eine Lösung:  $y(x) = 0$ .

Für  $y \neq 0$  erhält man

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{3y(x)^{\frac{2}{3}}} &= 1 \\ \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{3y(x)^{\frac{2}{3}}} dx &= \frac{1}{3} \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int dx + c \\ \Rightarrow y(x) &= (x + c)^3, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Durch jeden Punkt  $-c$  der  $x$ -Achse verlaufen zwei Lösungskurven, nämlich  $y(x) = 0$  und  $y(x) = (x + c)^3$ .

Wir betrachten nun Lösungsmethoden für einige spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.

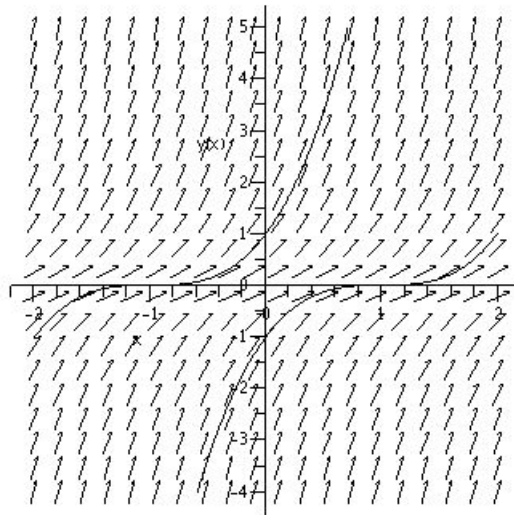
### Trennung der Variablen

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(x)g(y).$$

Eine solche DGL löst man mit Hilfe der Methode der *Trennung der Variablen*. Für  $g(y) \neq 0$  schreibt man

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{g(y(x))} &= f(x) & \Big| \int \\ \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx &= \int f(x) dx + c & \Big| \text{Substitution} \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x) dx + c \end{aligned}$$

Abbildung 10.2: Richtungsfeld und Integralkurven zu  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ **Merkregel**

- (1) Schreibe  $y' = f(x)g(y)$  in der Form:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

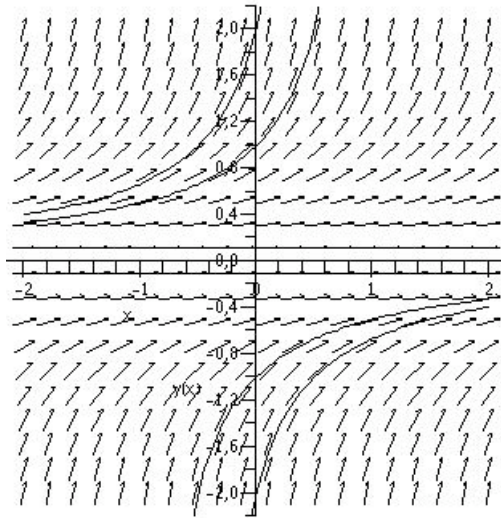
- (2) Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

- (3) Auf beiden Seiten integrieren.  
(4) Auflösen nach  $y$ .

**Beispiel 10.1.5**

$$y' = y^2 \quad (\text{d.h. } f(x) = 1, g(y) = y^2)$$

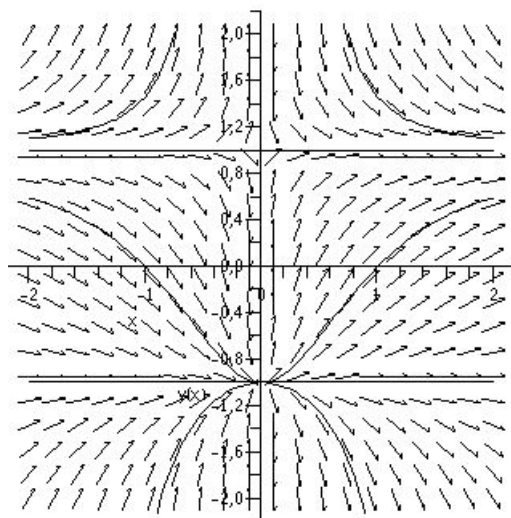
Abbildung 10.3: Richtungsfeld und Integalkurven zu  $y' = y^2$ 

- (1)  $\frac{dy}{dx} = y^2$
- (2)  $\frac{dy}{y^2} = dx \quad (y \neq 0)$
- (3)  $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx + c \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + c$
- (4)  $y(x) = -\frac{1}{c+x}, \quad x \neq -c \quad (\text{und } y(x) \neq 0)$

**Beispiel 10.1.6**

$$y' = \frac{1-y^2}{x}, \quad x \neq 0.$$



Abbildung 10.4: Richtungsfeld und Integalkurven zu  $y' = \frac{1-y^2}{x}$ 

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{x}$$

$$(2) \quad \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{x} \quad (y \neq \pm 1)$$

$$(3) \quad \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow \ln \sqrt{\left| \frac{1+y}{1-y} \right|} = \ln |x| + c$$

$$(4) \quad \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = c_1 x^2, \quad c_1 = e^{2c} > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{c_2 x^2 - 1}{c_2 x^2 + 1}, \quad c_2 = \pm c_1, \quad (\text{und } y(x) = 1, y(x) = -1)$$

## 10.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung sind von der Form

$$y' = a(x)y + b(x).$$

$b(x)$  heißt *Störfunktion* (*Störglied*). Die DGL heißt *homogen*, wenn  $b(x) = 0$ , andernfalls *inhomogen*.

Wir betrachten zunächst die der obigen DGL zugeordnete *homogene DGL*

$$y' = a(x)y.$$

### Lösung der homogenen DGL

Mit Trennung der Variablen folgt

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= a(x)dx \\ \Rightarrow \ln |y| &= \int a(x)dx + c_0 \\ \Rightarrow y(x) &= c \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right), \quad x_0 \text{ fest, } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten

Ansatz:

$$y(x) = c(x)y_h(x)$$

mit  $y_h = \exp(\int_{x_0}^x a(t)dt)$  Lösung der zugeordneten homogenen DGL. In  $y' = a(x)y + b(x)$  eingesetzt:

$$\begin{aligned} y' &= c'y_h + cy'_h = acy_h + b \\ \Rightarrow c'(x) &= b(x) \frac{1}{y_h(x)} \\ \Rightarrow c(x) &= \int_{x_1}^x b(\xi) \frac{1}{y_h(\xi)} d\xi + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als vollständige allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} \left( c + \int_{x_1}^x b(\xi) e^{-\int_{x_0}^{\xi} a(t)dt} d\xi \right) \quad x_0, x_1 \text{ fest, } c \in \mathbb{R}.$$

**Bemerkung 10.2.1**  $x_0, x_1$  sind beliebig, aber fest zu wählen. Ist eine Anfangsbedingung  $y(x^*) = y^*$  gegeben, so ist es zweckmäßig  $x_0 = x_1 = x^*$  zu wählen.

### Beispiel 10.2.1

$$y' = \frac{1}{x}y + x^3, \quad x \neq 0.$$

(1) Homogene Gleichung:

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{x}y &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow y(x) = c \exp\left(\int_0^x \frac{1}{t} dt\right) = cx. \end{aligned}$$

(2) Variation der Konstanten: Ansatz  $y(x) = c(x)x$

$$\begin{aligned} c(x) &= \int_0^x \xi^3 \frac{1}{\xi} d\xi + c = \frac{1}{3}x^3 + c \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^4 + cx. \end{aligned}$$

## 10.3 Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir behandeln nun die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Dieses Anfangswertproblem kann genau eine Lösung besitzen (Beispiel 10.1.1) oder auch mehr als eine Lösung (Beispiel 10.1.4). Wie kann man es  $f$  ansehen, welcher dieser Fälle eintritt?

**Satz 10.3.1 (Existenzsatz von Peano)** *Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $(x_0, y_0) \in D$  beliebig. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x, y) \in D$$

*mindestens eine Lösung, die sich bis zum Rand von  $D$  nach links und rechts fortsetzen lässt.*

**Definition** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Man sagt,  $f$  genügt in  $G$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$ , wenn es eine Konstante  $L \geq 0$  (Lipschitz-Konstante) gibt mit

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

für alle Punkte  $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ .

Die Lipschitz-Bedingung lässt sich oft schwer nachprüfen. Deswegen ist der folgende Satz sehr nützlich.

**Satz 10.3.2** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Besitzt  $f(x, y)$  eine in  $G$  beschränkte partielle Ableitung  $f_y(x, y)$ , so genügt  $f$  in  $G$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$ .*

**Satz 10.3.3 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf)**

*Es sei*

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

*$f : R \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f$  genüge in  $R$  einer Lipschitzbedingung bezüglich  $y$ . Es sei  $M = \max\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in R\}$  und  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .*

*Dann besitzt das AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x, y) \in R$$

*genau eine Lösung, die mindestens auf dem Intervall  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  definiert ist.*

## 10.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

mit Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$  und einer Störfunktion  $f(x)$ .

Ist  $f(x) = 0$ , so nennt man die DGL *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

### Homogene lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Sind  $y_1(x), y_2(x)$  Lösungen dieser DGL und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , so ist auch

$$y(x) := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

eine Lösung der DGL. Man kann nun zeigen, dass man zwei Lösungen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  finden kann, so dass sich jede Lösung  $y_h(x)$  der homogenen DGL in der Form

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

schreiben lässt. Ein solches Paar von Lösungen  $y_1(x), y_2(x)$  heißt ein *Fundamentalsystem* (von Lösungen) der DGL.

Um nun ein Fundamentalsystem zu bestimmen, ist es zweckmäßig, auch komplexe Lösungen zuzulassen.

### Komplexifizierung

Wir fassen die DGL als eine DGL für eine komplexwertige Funktion

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad u(x), v(x) \in \mathbb{R},$$

der reellen Variablen  $x$  auf.

Ableitung:  $y'(x) = u'(x) + iv'(x)$ .

Vergleich von Realteil und Imaginärteil zeigt:

$$y(x) = u(x) + iv(x) \text{ ist Lösung von } y'' + ay' + by = f(x) \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'' + au' + bu = f(x) \\ v'' + av' + bv = 0 \end{array} \right\}$$

In I, §1, haben wir  $e^{i\varphi}$  als Bezeichnung eingeführt (Eulerformel):

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Wir definieren nun allgemeiner:

**Definition (Komplexe e-Funktion)** Für jedes  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , ist

$$e^z := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Für die komplexe e-Funktion gelten die folgenden Regeln

$$\text{Funktionalgleichung : } e^{w+z} = e^w e^z, \quad w, z \in \mathbb{C}$$

$$\text{Ableitungsregel : } \frac{d}{dx} e^{wx} = w e^{wx}, \quad w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$$

### Fundamentalsystem für die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Lösungsansatz:  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$

in DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0 \\ \Leftrightarrow \chi(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b &= 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung}) \end{aligned}$$

Nullstellen:  $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$

Nun machen wir eine Fallunterscheidung

**1. Fall:**  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

reelle Lösungen, Fundamentalsystem.

**2. Fall:**  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Nur eine Fundamentallösung:  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ .

Variation der Konstanten:  $y(x) = c(x)y_1(x)$

In die DGL eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} c''y_1 + 2c'y_1' + cy_1'' + ac'y_1 + acy_1' + bcy_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow c''y_1 + 2c'y_1' + ac'y_1 + c(y_1'' + ay_1' + by_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow c''(x)e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 c'(x)e^{\lambda_1 x} + ac'(x)e^{\lambda_1 x} &= 0 \\ \Leftrightarrow c''(x) = 0 \quad \left(\text{da } \lambda_1 = -\frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $c(x) = c_1 + c_2 x$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Als allgemeine Lösung ergibt sich:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (\text{reelle Lösung}).$$

Fundamentalsystem:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}.$$

**3. Fall:** Die Nullstellen sind komplex konjugiert

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$$

Komplexe Lösungen:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ \tilde{y}_2(x) &= e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned}$$

Reelle Lösungen:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \operatorname{Re} \tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2(x) &= \operatorname{Im} \tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

**Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung**

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Die vollständige allgemeine Lösung dieser DGL ist

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$y_p$  partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$y_h$  Lösung der zugeordneten homogenen DGL

$y_1, y_2$  Fundamentalsystem der zugeordneten homogenen DGL

Eine spezielle Lösung  $y_p(x)$  kann man mit

(a) Variation der Konstanten

(b) Ansatz vom Typ der rechten Seite

bestimmen. Die Methode (b) wird in dem folgenden Beispiel behandelt.

**Beispiel 10.4.1 (Lineare Schwingungen)** Wir betrachten die Schwingung eines Federpendels unter Einwirkung einer äußeren Kraft (erzwungene Schwingung):

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = \cos \mu t, \quad \mu > 0.$$

Die Störfunktion  $\cos \mu t$  bedeutet eine harmonische Anregung.

(a) Lösung der homogenen DGL (Eigenschwingungen)

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

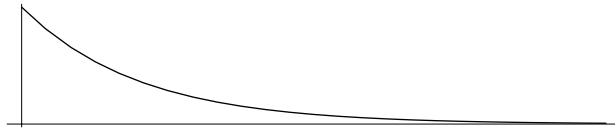
Nullstellen:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha := \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 := \frac{k}{m} \end{aligned}$$

1. Fall:  $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$  (starke Dämpfung)

Dann gilt  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Die allgemeine Lösung lautet

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Abbildung 10.5: Starke Dämpfung:  $x_h(t) = e^{-t}$ 

Die Lösungen klingen ohne Schwingungen, d.h. *aperiodisch* ab.

2. Fall:  $\alpha^2 = \omega_0^2$  ( $> 0$ )

Dann gilt  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha < 0$ . Die allgemeine Lösung lautet

$$x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen haben qualitativ das gleiche Verhalten wie im 1. Fall: Das Pendel schwingt noch einmal durch die Ruhelage hindurch, um dann langsam endgültig in die Ruhelage zurückzukehren (bei gewissen Anfangsbedingungen). (Dies ist aber auch im 1. Fall möglich!) Dieser Fall heißt der *aperiodische Grenzfall*.

Abbildung 10.6: Aperiodischer Grenzfall:  $x_h(t) = (1 - 3t)e^{-t}$ 

3. Fall:  $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$  (schwache Dämpfung)

Die Nullstellen sind also konjugiert komplex:

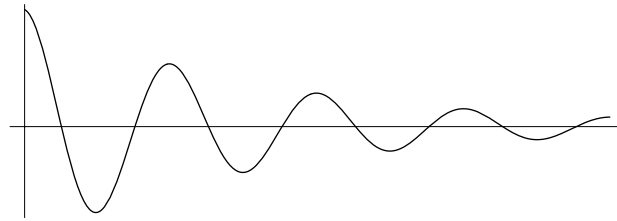
$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega, \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x_h(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, es treten *gedämpfte* (die Amplitude wird um den Faktor  $e^{-\alpha t}$  gedämpft) *Schwingungen* mit der *Eigenfrequenz*  $\omega$  auf: *periodischer Fall*. Man



Abbildung 10.7: Schwache Dämpfung:  $x_h(t) = e^{-(1/2)t} \cos 5t$ 

beachte, dass die Eigenfrequenz  $\omega$  mit zunehmender Reibung  $r$  abnimmt.

Grenzfälle:

$r = 0$  (keine Reibung):  $\omega = \omega_0$  harmonische Schwingungen

$r = 2\sqrt{mk}$ : aperiodischer Grenzfall.

(b) Lösung der inhomogenen DGL

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = \cos \mu t.$$

Hier ist es zweckmäßig, die DGL

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t \quad (10.1)$$

zu lösen und nachher nur den Realteil zu betrachten.

Ansatz:  $x_p^*(t) = B e^{i\mu t}$ .

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} -m\mu^2 B e^{i\mu t} + ir\mu B e^{i\mu t} + kB e^{i\mu t} &= e^{i\mu t} \\ \Leftrightarrow B &= \frac{1}{(k - m \cdot \mu^2) + ir\mu} \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $B \neq 0$  für  $r > 0, \mu > 0$ . Es gilt

$$B = \frac{(k - m \cdot \mu^2) - ir\mu}{(k - m \cdot \mu^2)^2 + r^2 \mu^2}.$$

Schreibe  $B = A e^{-i\varphi}$  mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{(k - m \cdot \mu^2)^2 + r^2 \mu^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{r\mu}{k - m\mu^2}.$$

Damit ist

$$x_p^*(t) = A e^{i(\mu t - \varphi)}$$

Lösung von (10.1) und wir erhalten als spezielle Lösung der inhomogenen DGL

$$x_p(t) = A \cos(\mu t - \varphi).$$

Diese Schwingung hat die gleiche Frequenz  $\mu$  wie die Anregung, sie ist für  $r > 0$  stets um die Phase  $\varphi > 0$  verschoben und hat eine Amplitude, die wie  $\varphi$  von  $\mu$  abhängt. Man nennt  $A$  den *Verstärkungsfaktor*.

$A$  hat für  $\mu = \mu_0$  ein Maximum, wenn der Nenner dort ein Minimum besitzt. Eine notwendige Bedingung dafür ist:

$$\mu_0^2 = \frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2} = \omega_0^2 - 2\alpha^2.$$

Dies ist die *Resonanzfrequenz*. Es gilt

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \mu_0 \rightarrow \omega \Rightarrow A \rightarrow \infty.$$

Dies führt zur *Resonanzkatastrophe* (z.B. Einsturz von Brücken).

# Inhaltsverzeichnis

<b>7</b>	<b>Kurven im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>3</b>
7.1	Ebene Kurven . . . . .	3
7.2	Kurven im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
<b>8</b>	<b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>25</b>
8.1	Differentiation . . . . .	25
8.2	Richtungsableitung . . . . .	35
8.3	Lokale Extremwerte . . . . .	41
8.4	Extremwerte mit Nebenbedingungen . . . . .	48
<b>9</b>	<b>Integration im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>55</b>
9.1	Integration über Bereiche . . . . .	55
9.2	Kurvenintegrale . . . . .	69
9.3	Oberflächenintegrale . . . . .	71
9.4	Integralsätze . . . . .	76
<b>10</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>91</b>
10.1	Spezielle Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung . . . . .	91
10.2	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	97
10.3	Der Satz von Picard-Lindelöf . . . . .	99
10.4	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	100