

Algebraische Flächen

Klaus Hulek

Der vorliegende Text ist die Ausarbeitung einer Vorlesung über Algebraische Flächen, die ich im SS 1994 und im Wintersemester 2001/2002 an der Universität Hannover gehalten habe. Mein Ziel war es, die Enriques-Kodaira Klassifikation der algebraischen Flächen im Sinne der Mori-Theorie durchzuführen. Als Quellen haben mir vor allem Vorlesungsausarbeitungen von C. Peters, M. Schneider und A. Van de Ven gedient. Diesen Kollegen möchte ich herzlich für die Überlassung ihrer Manuskripte danken. Die vorliegende Ausarbeitung lehnt sich teilweise eng an das Skript von C. Peters an.

Mein besonderer Dank gilt Frau S. Guttner für die sorgfältige Erstellung des Tex-Files und Herrn R. Wetke für die Erstellung der Bilder.

I Grundlagen

1.1 Divisoren

Im folgenden bezeichnet S immer eine glatte, irreduzible projektive Fläche. Wir arbeiten stets über dem Grundkörper \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

\mathcal{O}_S bezeichnet die *Strukturgarbe* auf S . Die Garbe der 1-*Formen* wird mit Ω_S^1 , das *Tangentialbündel* mit T_S bezeichnet. Ferner sei

$$K_S = \omega_S = \Lambda^2 \Omega_S^1$$

das *kanonische Bündel* auf S .

Ein *Divisor* auf S ist eine endliche formale Summe

$$D = \sum n_i C_i$$

mit $n_i \in \mathbb{Z}$, wobei die C_i irreduzible Kurven auf S sind. Zwei Divisoren D_1, D_2 heißen *linear äquivalent* ($D_1 \sim D_2$), falls es eine rationale Funktion $0 \neq f \in K(S)$ gibt, mit

$$(f) = D_1 - D_2.$$

Die Menge aller Divisoren auf S bildet eine Gruppe $\text{Div}(S)$. Der Quotient

$$\text{Cl}(S) = \text{Div}(S) / \sim$$

heißt die *Divisorenklassengruppe* von S .

Ein *Geradenbündel* auf S ist eine lokalfreie \mathcal{O}_S -Garbe vom Rang 1. Die Menge der (Isomorphieklassen) aller Geradenbündel auf S bildet mit dem Tensorprodukt \otimes als Verknüpfung eine Gruppe $\text{Pic}(S)$. Dies ist die *Picardgruppe* von S .

Man kann jedem Divisor wie folgt ein Geradenbündel zuordnen: Es sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von S , so daß es rationale Funktionen f_i gibt, mit

$$D \cap U_i = \{f_i = 0\}.$$

Dann setzt man

$$\mathcal{O}_S(D)|_{U_i} := \frac{1}{f_i} \cdot \mathcal{O}_{U_i} \subset \mathcal{K}|_{U_i}$$

Dies definiert eine Untergarbe $\mathcal{O}_S(D) \subset \mathcal{K}$, wobei \mathcal{K} die (konstante) Garbe der rationalen Funktionen auf S bezeichnet. Diese Zuordnung liefert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Cl}(S) &\cong \text{Pic } S \\ D &\mapsto \mathcal{O}_S(D). \end{aligned}$$

(Statt $\mathcal{O}_S(D)$ ist auch oft die Bezeichnung $\mathcal{L}(D)$ üblich).

Beispiele:

(i) $S = \mathbb{P}^2$. Dann ist

$$\text{Pic } \mathbb{P}^2 = \{\mathcal{O}(k) : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

(ii) $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Es seien p, q die Projektionen auf die einzelnen Faktoren. Mit

$$\mathcal{O}(a, b) = p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \otimes q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$$

gilt

$$\text{Pic } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \{\mathcal{O}(a, b); a, b \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

1.2 Das Schnittprodukt

In diesem Abschnitt soll das *Schnittprodukt* auf Flächen eingeführt werden.

Dazu seien zunächst C, C' zwei irreduzible Kurven mit $C \neq C'$. Für $P \in S$ sei \mathcal{O}_P der lokale Ring in P und f, g seien lokale Gleichungen für C , bzw. C' .

Definition: Für jeden Punkt $P \in S$ wird die lokale *Schnittmultiplizität* definiert durch

$$m_P(C, C') := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P / (f, g).$$

Bemerkungen:

(i) Es gilt

$$m_P(C, C') > 0 \iff P \in C \cap C'.$$

(ii) Nach dem (lokalen) Nullstellensatz existiert ein n mit $x^n, y^n \in (f, g)$, d.h. es gilt $m_P(C, C') < \infty$.

Beispiele:

(i) Es seien x, y lokale Koordinaten.

$$C = \{x = 0\}, \quad C' = \{y = 0\}.$$

Dann ist

$$m_P(C, C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P / (x, y) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P / m_P = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1,$$

wobei $m_P \subset \mathcal{O}_P$ das maximale Ideal bezeichnet.

(ii) Es sei

$$C = \{x = 0\}, \quad C' = \{y^2 - x = 0\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{O}_P / (x, y^2) = (\bar{1}, \bar{y}).$$

Das heißt

$$m_P(C, C') = 2.$$

Lemma I.2.1 Die Kurven C und C' schneiden sich genau dann in P transversal, wenn $m_P(C, C') = 1$.

Beweis. Falls sich C und C' transversal schneiden in P , erzeugen \bar{f} und \bar{g} den Vektorraum m_P / m_P^2 . Nach dem Nakayama Lemma gilt dann $(f, g) = m_P$, also

$$m_P(C, C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P / (f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P / m_P = 1.$$

Ist umgekehrt der Schnitt nicht transversal, so gilt $(f, g) \subsetneq m_P$. Also hat die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_P / (f, g) \longrightarrow \mathcal{O}_P / m_P \longrightarrow 0$$

einen nicht-trivialen Kern, d.h.

$$m_P(C, C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P / (f, g) > 1.$$

□

Da C und C' verschiedene irreduzible Kurven sind, ist die Schnittmenge $C \cap C'$ endlich.

Definition: Die Schnittzahl von C und C' ist definiert als

$$C.C' = \sum_{P \in C \cap C'} m_P(C, C').$$

Bemerkung: Es seien $C, C' \subset \mathbb{P}^2$ ebene Kurven von Grad d , bzw. d' . Dann besagt der Satz von Bezout:

$$C.C' = d \cdot d'.$$

Wir wollen obigen Sachverhalt nun umformulieren. Dazu betrachten wir die Geradenbündel $\mathcal{O}_S(-C)$, bzw. $\mathcal{O}_S(-C')$. Dies sind die Idealgarben von C , bzw. C' . Es gibt (bis auf einen Skalar eindeutig bestimmte) Schnitte $s \in H^0(\mathcal{O}_S(C))$, bzw. $s' \in H^0(\mathcal{O}_S(C'))$ mit $C = \{s = 0\}$, bzw. $C' = \{s' = 0\}$. Es sei

$$\mathcal{O}_{C \cap C'} := \mathcal{O}_S / (\mathcal{O}_S(-C) + \mathcal{O}_S(-C'))$$

Lemma I.2.2 *Die Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C - C') \xrightarrow{(s', -s)} \mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C') \xrightarrow{(s, s')} \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_{C \cap C'} \rightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Sind f, g lokale Gleichungen für C und C' , so lautet die obige Sequenz lokal

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P \xrightarrow{(g, -f)} \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_P \xrightarrow{(f, g)} \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P/(f, g) \rightarrow 0.$$

Die Exaktheit ist nur an der zweiten Stelle zu überprüfen. Ist $af + bg = 0$, so folgt, da \mathcal{O}_P faktoriell ist, daß $a = hg$, $b = -hf$ ist. Dies zeigt Exaktheit. \square

Bemerkung: Der Beweis des obigen Lemmas zeigt auch, daß

$$C.C' = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}_{C \cap C'}).$$

Definition: Für eine kohärente Garbe \mathcal{L} auf S ist die *Euler-Charakteristik* von \mathcal{L} definiert durch

$$\chi(\mathcal{L}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(\mathcal{L})$$

(wobei $h^i(\mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(S, \mathcal{L})$ ist).

Bemerkung: Ist

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3 \rightarrow 0$$

so gilt

$$\chi(\mathcal{L}_1) - \chi(\mathcal{L}_2) + \chi(\mathcal{L}_3) = 0$$

Definition: Für Geradenbündel $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \text{Pic } S$ wird das *Schnittprodukt* definiert durch

$$(\mathcal{L}, \mathcal{L}') := \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{L}^{-1}) - \chi(\mathcal{L}'^{-1}) + \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}'^{-1}).$$

Theorem I.2.3

(i) *Das Schnittprodukt definiert eine symmetrische Bilinearform*

$$(\ , \) : \text{Pic } S \times \text{Pic } S \rightarrow \mathbb{Z}.$$

(ii) *Sind C, C' irreduzible, verschiedene Kurven, so gilt:*

$$(C, C') = (\mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C')).$$

Beweis. (ii) Unter Verwendung von Lemma I.2.2 gilt:

$$\begin{aligned} (C, C') &= h^0(\mathcal{O}_{C \cap C'}) \\ &= \chi(\mathcal{O}_{C \cap C'}) \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) - \chi(\mathcal{O}_S(-C')) + \chi(\mathcal{O}_S(-C) \otimes (\mathcal{O}_S(-C'))) \\ &= (\mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C')). \end{aligned}$$

\square

Bevor wir den Beweis von (i) geben können, benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Lemma I.2.4 *Es sei $C \subset S$ eine glatte, irreduzible Kurve. Dann gilt*

$$(\mathcal{O}_S(C).\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}|_C)$$

Beweis. Wir haben die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}(-C) \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}|_C \longrightarrow 0$$

Diese ergeben

$$\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) = \chi(\mathcal{O}_C) \tag{1}$$

$$-\chi(\mathcal{L}^{-1}) + \chi(\mathcal{L}^{-1}(-C)) = -\chi(\mathcal{L}^{-1}|_C) \tag{2}$$

Nun ist

$$\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g(C) \tag{3}$$

bzw. nach dem Satz von Riemann-Roch auf C

$$-\chi(\mathcal{L}^{-1}|_C) = \deg \mathcal{L}|_C - 1 + g(C). \tag{4}$$

Addition von (1) und (2) ergibt zusammen mit (3) und (4):

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_S(C).\mathcal{L}) &= \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) - \chi(\mathcal{L}^{-1}) + \chi(\mathcal{L}^{-1}(-C)) \\ &= \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}^{-1}|_C) \\ &= 1 - g(C) + \deg(\mathcal{L}|_C) - 1 + g(C) \\ &= \deg(\mathcal{L}|_C). \end{aligned}$$

□

Für Geradenbündel $\mathcal{L}_i \in \text{Pic } S$, $i = 1, 2, 3$ definieren wir

$$s(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) := (\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_3) - (\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2) - (\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_3).$$

Bemerkungen:

- (i) Die Abbildung s ist symmetrisch in $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ und \mathcal{L}_3 . (Dies ist klar für \mathcal{L}_2 und \mathcal{L}_3 . Für \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 prüft man es unmittelbar mit Hilfe der Definition nach.)
- (ii) Ist $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_S(C)$ für C glatt, irreduzibel so ist $s(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) = 0$. Wegen (i) gilt dies auch, falls $\mathcal{L}_2 = \mathcal{O}_S(C)$, bzw $\mathcal{L}_3 = \mathcal{O}_S(C)$.

Satz I.2.5 *Für jeden Divisor D gibt es glatte, irreduzible Kurven A, B mit $D \sim A - B$.*

Beweis. Es sei H sehr ampel. Dann kann man aus dem Satz von Serre schließen, daß für $n \gg 0$ auch $D + nH$ sehr ampel ist. Nach dem Satz von Bertini gibt es eine glatte irreduzible Kurve A mit $D + nH \sim A$. Ebenfalls nach Bertini gibt es auch eine glatte irreduzible Kurve B mit $nH \sim B$. Dann ist $D \sim A - B$. □

Beweis.(von Theorem I.2.3(ii):) Die Form (\cdot, \cdot) ist offensichtlich symmetrisch. Wir können nun glatte, irreduzible Kurven A, B wählen mit $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_S(A - B)$. Nach der obigen Bemerkung gilt dann

$$s(\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{O}_S(B)) = 0.$$

Dies gibt

$$(\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_S(A)) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}') + (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_S(B))$$

bzw.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}') &= (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_S(A)) - (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_S(B)) \\ &= \deg(\mathcal{L}|_A) - \deg(\mathcal{L}|_B) \end{aligned}$$

unter Verwendung von Lemma I.2.4. Dies zeigt Linearität in \mathcal{L} . Linearität bezüglich \mathcal{L}' folgt nun aus der Symmetrie. \square

Bemerkung: Es folgt, daß das Schnittprodukt $C \cdot C'$ nur von den Äquivalenzklassen von C und C' bezüglich linearer Äquivalenz abhängt.

Beispiel:

(i) $S = \mathbb{P}^2$ Dann ist

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^2) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(aL); \quad a \in \mathbb{Z}\}$$

wobei $L \subset \mathbb{P}^2$ eine Gerade ist. Es ist

$$L \cdot L = 1$$

also

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(aL) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(bL)) = ab \quad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

(ii) $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Dann ist

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b); \quad a, b \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Geometrisch ist

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(aL_1 + bL_2)$$

wobei L_1, L_2 Regelgeraden sind. Die Schnittform ist festgelegt durch

$$L_1 \cdot L_2 = 1, \quad L_1 \cdot L_1 = L_2 \cdot L_2 = 0$$

Also

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a', b')) = ab' + a'b.$$

D.h. durch die durch L_1 und L_2 gegebene Basis ist die Schnittform durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Gitter \mathbb{Z}^2 versehen mit dieser symmetrischen Bilinearform wird auch als *hyperbolische Ebene* bezeichnet.

Satz I.2.6 (i) *Es sei C eine Kurve und $f : S \rightarrow C$ sei ein surjektiver Morphismus. Dann gilt für jede Faser F , daß $F^2 = 0$.*

(ii) *Es sei S' eine Fläche und $f : S \rightarrow S'$ ein surjektiver Morphismus vom Grad d . Dann gilt*

$$(f^*(D) \cdot f^*(D')) = d(D \cdot D').$$

Beweis. Unmittelbar aus dem "moving lemma" I.2.5. \square

1.3 Riemann-Roch und Adjunktionsformel

Zunächst erinnern wir an

Theorem I.3.1 (Serre-Dualität:) Für jede lokal freie Garbe \mathcal{F} auf S gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H^i(S, \mathcal{F}) \cong H^{2-i}(S, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_S)^\vee.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt $h^i(\mathcal{F}) = h^{2-i}(\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_S)$ und damit $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_S)$.

Theorem I.3.2 (Riemann-Roch:) Für jedes Geradenbündel $\mathcal{L} \in \text{Pic}(S)$ gilt

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L} \cdot \omega_S).$$

Beweis. Aus der Definition der Schnittzahl ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^{-1} \cdot \mathcal{L} \otimes \omega_S^{-1}) &= \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \omega_S) + \chi(\omega_S) \\ &= 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{L})) \end{aligned}$$

also

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \otimes \omega_S^{-1}).$$

□

Bemerkung: Für $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(D)$ schreibt man oft $h^i(D) := h^i(\mathcal{O}(D))$. Damit lautet der Satz von Riemann-Roch

$$h^0(D) - h^1(D) + h^2(D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D \cdot K_S)$$

bzw. unter Verwendung von Serre-Dualität

$$h^0(D) - h^1(D) + h^0(K_S - D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D \cdot K_S).$$

Es sei nun C eine Kurve.

Definition: Das *arithmetische Geschlecht* von C ist definiert durch

$$p(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$$

Bemerkung: Ist C reduziert und zusammenhängend, so ist $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$, also $p(C) = h^1(\mathcal{O}_C)$. Insbesondere stimmen für eine glatte, zusammenhängende Kurve das arithmetische Geschlecht und das geometrische Geschlecht überein.

Es sei nun C eine irreduzible, reduzierte Kurve und $\nu : \tilde{C} \rightarrow C$ sei die *Normalisierung* von C . Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \delta \rightarrow 0$$

wobei der Träger von δ der singuläre Ort von C ist. Da nun $h^0(\mathcal{O})_C = h^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = 1$ und $h^1(\delta) = 0$, so folgt

$$h^1(\mathcal{O}_C) = h^1(\nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) + h^0(\delta).$$

Da ν ein affiner Morphismus ist, gilt

$$h^1(\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = h^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = p(\tilde{C}).$$

Also

$$p(C) = p(\tilde{C}) + \sum_{P \in \text{Sing } C} \dim \delta_P.$$

Insbesondere ist $p(C) > p(\tilde{C})$ außer C ist glatt. Dies führt zu folgender Feststellung, die später wiederholt von Nutzen sein wird:

Bemerkung: Ist C eine irreduzible Kurve mit $p(C) = 0$, so ist die Kurve C selbst rational und glatt.

Satz I.3.3 Für eine Kurve $C \subset S$ gilt

$$p(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K_S).$$

Beweis. Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

folgt zusammen mit Riemann-Roch

$$\begin{aligned} p(C) &= 1 - \chi(\mathcal{O}_C) \\ &= 1 - \chi(\mathcal{O}_S) + \chi(\mathcal{O}_S(-C)) \\ &= 1 + \frac{1}{2}((-C)^2 - (-C).K_S) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K_S). \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Ist $C \subset S$ glatt, so gilt die *Adjunktionsformel*

$$\omega_C = \mathcal{O}_S(C + K_S)|_C = \mathcal{O}_S(C) \otimes \omega_S|_C.$$

Dies folgt unmittelbar aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2 \xrightarrow{d} \Omega_S^1|_C \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow 0$$

die in dieser Situation

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C)|_C \rightarrow \Omega_S^1|_C \rightarrow \omega_C \rightarrow 0$$

ist.

1.4 Zusammenhang mit der Topologie

Wir betrachten nun eine projektive Fläche S , versehen mit der gewöhnlichen (komplexen) Topologie. Dann kann man die Kohomologiegruppen $H^i(S, \mathbb{Z})$, $H^i(S, \mathbb{R})$ entweder topologisch einführen, oder als Kohomologiegruppen der konstanten Garben \mathbb{Z} , bzw. \mathbb{R} erhalten. Da S reell 4-dimensional ist, gilt $H^i(S, \mathbb{Z}) = 0$, bzw. $H^i(S, \mathbb{R}) = 0$ für $i > 4$.

Definition:

(i) Die i -te *Bettizahl* von S ist definiert als

$$b_i(S) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$$

(ii) Die *Eulerzahl* von S ist definiert durch

$$e(S) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i(S).$$

Bemerkung: Die Gruppen $H^i(S, \mathbb{Z})$ sind endlich erzeugte abelsche Gruppen. Insbesondere sind die Vektorräume $H^i(S, \mathbb{R})$ endlich dimensional.

Wir betrachten nun die folgende exakte Sequenz

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_h \xrightarrow{e^{2\pi i}} \mathcal{O}_h^* \rightarrow 0.$$

wobei \mathcal{O}_h die holomorphe Strukturgarbe ist. Dies induziert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_h) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_h^*) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Dabei ist

$$H^1(S, \mathcal{O}_h^*) = \text{Pic}_h S$$

die Gruppe der holomorphen Geradenbündel. Nach GAGA gibt es nun kanonische Isomorphismen

$$H^1(S, \mathcal{O}) \cong H^1(S, \mathcal{O}_h)$$

sowie

$$\text{Pic } S \cong \text{Pic}_h S.$$

Damit lautet obige Sequenz

$$(2) \quad 0 \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z})$$

Definition:

(i) Ist \mathcal{L} ein Geradenbündel auf S , so heißt die Kohomologieklass $c_1(\mathcal{L})$ die *erste Chernklasse* von \mathcal{L} .

(ii) Das Bild von $\text{Pic}(S)$ unter c_1 heißt die *Néron-Severi Gruppe* von S .

Bezeichnung: Die Néron-Severi-Gruppe wird mit $NS(S)$ bezeichnet.

Bemerkung: $H^2(S, \mathbb{Z})$ und damit auch $NS(S)$ sind endlich erzeugte abelsche Gruppen. Insbesondere ist $NS(S)$ von der Form

$$(3) \quad NS(S) = \mathbb{Z}^{\rho} \oplus \text{Torsion}.$$

Definition: Der Rang ρ der Néron-Severi Gruppe heißt die *Picard-Zahl* von S .

Schließlich setzen wir noch

$$(4) \quad \text{Pic}^0(S) = H^1(S, \mathcal{O})/H^1(S, \mathbb{Z}).$$

Mit Hilfe der Hodge-Theorie zeigt man, daß $\text{Pic}^0(S)$ ein Torus der Dimension

$$q = h^1(S, \mathcal{O})$$

ist. In der Tat ist $\text{Pic}^0(S)$ sogar eine *abelsche Varietät*.

Definition: q heißt die *Irregularität* der Fläche S .

Zusammenfassend hat man damit eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0 S \rightarrow \text{Pic} S \rightarrow NS(S) \rightarrow 0. \quad (5)$$

Man kann $\text{Pic}^0 S$ als den kontinuierlichen und $NS(S)$ als den diskreten Anteil der Picardgruppe verstehen.

Da S eine orientierte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, hat man einen natürlichen Isomorphismus

$$H^4(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Das *Cup-Produkt* liefert mit Hilfe dieser Identifikation eine (über \mathbb{R}) nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} H^2(S, \mathbb{Z}) \times H^2(S, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^4(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ ([a], [b]) &\longmapsto [a \cup b] \end{aligned} \quad (6)$$

Sind nun \mathcal{L} und \mathcal{L}' Geradenbündel auf S , so gilt

$$(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}') = [c_1(\mathcal{L}) \cup c_1(\mathcal{L}')]. \quad (7)$$

Schließlich besagt die *Poincaré-Dualität* (welche im wesentlichen dazu äquivalent ist, daß die durch (6) gegebene Form nicht ausgeartet ist), daß es Isomorphismen

$$D_S : H^n(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{4-n}(S, \mathbb{Z})$$

gibt. Insbesondere also ist

$$D_S : H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_2(S, \mathbb{Z}).$$

Ist nun C eine Kurve auf S , so sei

$$[C] = D_S(c_1(\mathcal{O}_S(C))).$$

Der Einfachheit halber sei C als glatt und irreduzibel angenommen. Dann kann man C auch so erhalten: Die Inklusion $i : C \rightarrow S$ liefert eine Abbildung

$$i_* : H_2(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(S, \mathbb{Z}).$$

Da C eine kompakte Riemannsche Kurve ist, gilt $H_2(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, und man erhält

$$i_*(1) = [C].$$

Schließlich liefert das *topologische Schnittprodukt* eine (über \mathbb{R}) nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform

$$H_2(S, \mathbb{Z}) \times H_2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Für Kurven C, C' auf S gilt dann

$$(\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{O}_S(C')) = (C \cdot C') = [C] \cdot [C']. \quad (8)$$

Schließlich sei noch auf *Noethers Formel* hingewiesen:

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + e(S)).$$

Diese kann man als Korollar der Hirzebruchschen Form des Satzes von Riemann-Roch erhalten.

1.5 Hodge-Theorie

Nach der Hodge-Theorie gibt es eine Zerlegung der Kohomologiegruppen mit komplexen Koeffizienten

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \quad (9)$$

wobei

$$H^{p,q} = H^q(X, \Omega^p)$$

ist. (X bezeichnet hier eine projektive Mannigfaltigkeit). Es gilt

$$H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}.$$

Die Zahlen

$$h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}$$

heißen die *Hodgezahlen* von X . Für die Bettizahlen von X gilt

$$b_i(X) = \sum_{p+q=i} h^{p,q}.$$

Es gilt

$$h^{p,q} = h^{q,p}, \quad h^{p,q} = h^{n-p, n-q} \quad (n = \dim X). \quad (10)$$

Letzteres ist eine Konsequenz der *Serre-Dualität*.

Für eine Fläche S betrachtet man den sogenannten *Hodge-Diamanten*, der wesentliche Informationen über die Topologie von S liefert.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & h^{00} \\ & & & & / \quad \backslash \\ & & & h^{10} & & h^{01} \\ & & & / \quad \backslash & & / \quad \backslash \\ h^{20} & & & h^{11} & & & h^{02} \\ & & & / \quad \backslash & & / \quad \backslash \\ & & & h^{30} & & & h^{03} \\ & & & & & & / \quad \backslash \\ & & & & & & h^{22} \end{array}$$

Ist $S = \mathbb{P}^2$, bzw. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ so sieht der Hodge-Diamant wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 \end{array}$$

Das universelle Koeffiziententheorem liefert eine natürliche Abbildung

$$\begin{array}{ccc} i : H^2(S, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^2(S, \mathbb{C}) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \otimes 1. \end{array}$$

Ein *Satz von Lefschetz* besagt dann, daß, faßt man $NS(S)$ als Teilmenge von $H^2(S, \mathbb{R})$ auf, gilt

$$NS(S) = H^2(S, \mathbb{Z}) \cap i^{-1}(H^{1,1}).$$

Man schreibt dies auch oft in der Form

$$NS(S) = H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}. \quad (11)$$

Definition: Wir setzen

$$N_{\mathbb{Q}}(S) := NS(S) \otimes \mathbb{Q}$$

bzw.

$$N_{\mathbb{R}}(S) := NS(S) \otimes \mathbb{R}.$$

Dies sind endlich-dimensionale Vektorräume über \mathbb{Q} bzw. \mathbb{R} . Die Schnittform liefert eine symmetrische Bilinearform

$$(\cdot, \cdot) : NS(S) \otimes NS(S) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Dies induziert eine symmetrische Bilinearform

$$(\cdot, \cdot) : N_{\mathbb{R}}(S) \otimes N_{\mathbb{R}}(S) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (12)$$

Mit Hilfe von Hodge-Theorie kann man zeigen, daß diese Form *nicht ausgeartet* ist.

1.6 Der algebraische Indexsatz

Wir führen zunächst den Begriff der numerischen Äquivalenz ein.

Definition: Zwei Divisoren D_1, D_2 heißen *numerisch äquivalent* ($D_1 \equiv D_2$), falls für alle Divisoren E gilt $D_1 \cdot E = D_2 \cdot E$.

Numerische Äquivalenz definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Divisoren.

Bemerkung: $D_1 \sim D_2 \Rightarrow D_1 \equiv D_2$.

Definition: $\text{Num}(S) := \text{Div}(S)/\equiv$.

Bemerkung: Es gilt

$$\text{Num}(S) = NS(S)/\text{Torsion}.$$

Klarerweise sind Torsionselemente numerisch trivial. Der Rest der Behauptung folgt, da die Schnittform auf $NS_{\mathbb{R}}(S)$ nicht ausgeartet ist.

Es sei \mathcal{L} ein Geradenbündel auf einer Varietät X und s_0, \dots, s_N eine Basis von X . Dann definiert man die rationale Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{|\mathcal{L}|} : X &\dashrightarrow \mathbb{P}^N \\ x &\mapsto (s_0(x) : \dots : s_N(x)). \end{aligned}$$

Definition:

- (i) Das Geradenbündel \mathcal{L} heißt *sehr ample*, falls die Abbildung $\varphi_{|\mathcal{L}|}$ eine Einbettung ist.
- (ii) \mathcal{L} heißt *ample*, falls es ein $n > 0$ gibt, so daß $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sehr ample ist.
- (iii) Ein Divisor D heißt *ample (sehr ample)*, falls das zugehörige Geradenbündel $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ ample (sehr ample) ist.

Theorem I.6.1 (Algebraischer Indexsatz) *Es sei H ein ample Divisor auf S . Es sei D ein Divisor mit $D.H = 0$ und $D \neq 0$. Dann gilt $D^2 < 0$.*

Korollar I.6.2 *Die durch die Schnittform induzierte symmetrische Bilinearform*

$$(\cdot, \cdot) : N_{\mathbb{R}}(S) \otimes N_{\mathbb{R}}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

hat die Signatur $(1, \rho - 1)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus obigem und der Tatsache, daß (\cdot, \cdot) nicht ausgeartet ist. \square

Bevor wir den Indexsatz beweisen können, benötigen wir noch

Lemma I.6.3 *Es sei H ein ample Divisor auf S . Für eine Divisorenklasse D mit $D^2 > 0$ und $(D.H) > 0$ gilt, daß für alle $n \gg 0$ der Divisor nD effektiv ist (d.h. es gibt einen effektiven Divisor D' , der den Punkt $nD \in N_{\mathbb{Q}}(S)$ repräsentiert).*

Beweis. Der Satz von Riemann-Roch für nD besagt

$$h^0(nD) - h^1(nD) + h^2(nD) = \frac{1}{2}(nD)(nD - K) + \chi(\mathcal{O}_S)$$

Wegen der Serre-Dualität gilt

$$h^2(nD) = h^0(K - nD).$$

Für $n \gg 0$ ist $(K - nD).H < 0$, also $h^0(K - nD) = 0$, da H ample ist (d.h. ein positives Vielfaches von H ist ein Hyperebenenschnitt). Also folgt, daß

$$h^0(nD) \geq \frac{1}{2}n^2D^2 - \frac{1}{2}nD.K + \chi(\mathcal{O}_S) > 0 \quad \text{für } n \gg 0.$$

□

Beweis.(von I.6.1) Sei $D^2 \geq 0$. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $D^2 > 0$. Sei $H' = D + nH$. Für $n \gg 0$ ist H' (vgl. [3, p. 358]) ampel. Es gilt $D.H' = D^2 + nD.H > 0$ für alle n . Nach I.6.3 ist dann mD effektiv für $m \gg 0$. Da H ampel ist, folgt $(mD).H > 0$, also $D.H > 0$, ein Widerspruch.

Es sei nun $D^2 = 0$. Da $D \neq 0$ gibt es einen Divisor E mit $D.E \neq 0$. Sei

$$E' = (H^2)E - (E.H)H.$$

Dann gilt $D.E' = (H^2)(D.E) \neq 0$ und $E'.H = 0$. Sei

$$D' = nD + E'.$$

Dann gilt $D'.H = nD.H + E'.H = 0$, sowie $(D')^2 = 2nD.E' + (E')^2$. Wegen $D.E' \neq 0$ kann man n so wählen, daß $(D')^2 > 0$. Nun kann man den ersten Schritt auf D' anwenden, und erhält erneut einen Widerspruch. □

Wir betrachten jetzt den endlich-dimensionalen Vektorraum $N_{\mathbb{R}}(S)$ zusammen mit der Schnittform

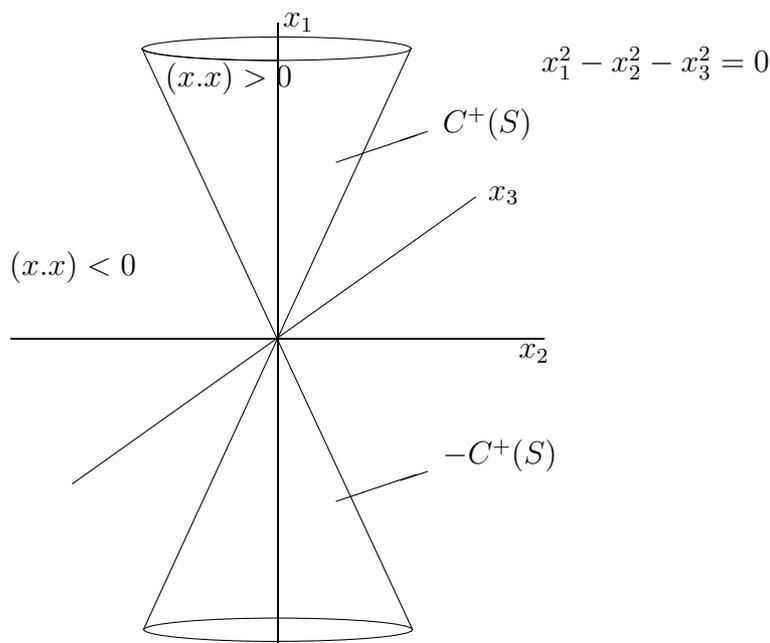
$$(\cdot, \cdot) : N_{\mathbb{R}}(S) \otimes N_{\mathbb{R}}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

die die Signatur $(1, \rho - 1)$ besitzt. Ein *Kegel* ist eine Teilmenge $C \subset N_{\mathbb{R}}(S)$ für die folgendes gilt: Ist $x \in C$, so auch λx für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Eine Teilmenge $C \subset N_{\mathbb{R}}(S)$ heißt *konvex*, falls mit $x, y \in C$ auch die Verbindungsstrecke \overline{xy} in C liegt.

Definition: Der *Lichtkegel* ist definiert als die Menge

$$C = \{x \in N_{\mathbb{R}}(S); (x,x) = 0\}.$$

Beispiel: Ist $\rho = \dim N_{\mathbb{R}}(S) = 3$, so hat man



Das Innere des Lichtkegels zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen

$$C^+(S) \amalg -C^+(S).$$

Es sei nun $S \subset \mathbb{P}^N$ eine projektive Einbettung und H ein Hyperebenenschnitt von S . Dann gilt $H^2 > 0$ und für alle effektiven Divisoren D gilt $H \cdot D > 0$. Das heißt, daß alle effektiven Divisoren C mit $C^2 > 0$ in einer Zusammenhangskomponente des Inneren des Lichtkegels liegen. Diese wird im folgenden stets mit $C^+(S)$ bezeichnet.

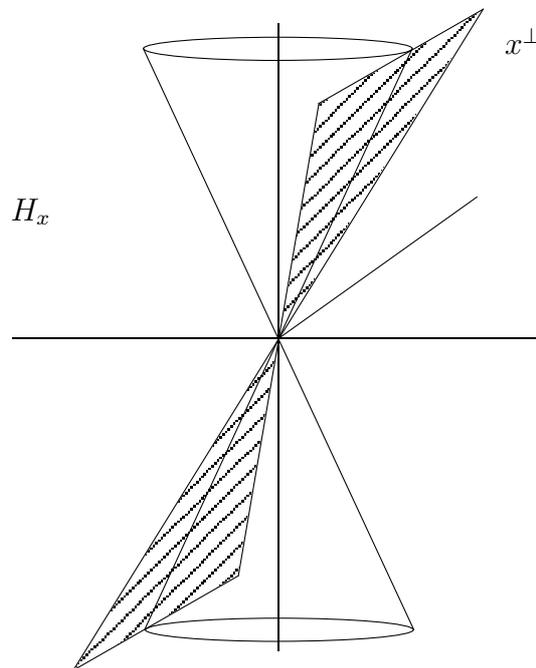
Definition: Ist $C \subset N_{\mathbb{R}}(S)$ ein Kegel, so wird der *duale Kegel* definiert durch

$$C^{\vee} = \{y \in N_{\mathbb{R}}(S); \quad (y \cdot x) \geq 0 \text{ für alle } x \in C\}.$$

Es sei nun $x \neq 0$ ein Element des Lichtkegels mit $x \in \overline{C^+(S)}$. Dann ist $\mathbb{R}_{\geq 0}x$ ein Halbstrahl. Der duale Kegel

$$H_x = (\mathbb{R}_{\geq 0}x)^{\vee}$$

ist ein Halbraum, der durch die Hyperebene x^{\perp} beschränkt wird:



x^{\perp} ist tangential an den Lichtkegel und geht durch x . Es gilt:

$$\overline{C^+(S)} = \bigcap_{(x \cdot x) = 0, x \in \overline{C^+(S)}} H_x.$$

Damit sieht man auch, daß

$$C^+(S)^{\vee} = \overline{C^+(S)}^{\vee} = \overline{C^+(S)}.$$

Definition:

(i) Ein \mathbb{Q} -Divisor ist ein Element $D \in \text{Div}(S) \otimes \mathbb{Q}$, d.h. eine endliche Summe

$$D = \sum n_i C_i \quad ; \quad n_i \in \mathbb{Q}.$$

(ii) Ein \mathbb{Q} -Divisor D heißt *effektiv*, falls es ein $n > 0$ gibt, so daß nD ein effektiver Divisor ist.

Korollar I.6.4 Die rationalen Punkte in $C^+(S)$ sind effektive \mathbb{Q} -Divisoren.

Beweis. Es sei $C \in C^+(S)(\mathbb{Q})$. Es gibt $n > 0$ mit $C' = nC \in \text{Div}(S)$. Dann ist $(C')^2 = n^2 C^2 > 0$ und $C'.H = (nC).H > 0$. Damit gibt es nach Lemma I.6.3 ein $m > 0$, so daß $mC' = mnC$ effektiv ist. \square

Im allgemeinen gibt es aber auch noch effektive Divisoren, die nicht in $C^+(S)$ liegen, z.B. exzeptionelle Kurven mit $C^2 < 0$. Es sei $\text{Ef}(S)$ der konvexe Kegel, der in $N_{\mathbb{R}}(S)$ von den effektiven Divisoren aufgespannt wird.

Definition: Der *Nef-Kegel* von S ist definiert durch

$$\text{Nef}(S) = \text{Ef}(S)^\vee = \{x \in N_{\mathbb{R}}(S); \quad x.e \geq 0 \text{ für alle } e \in \text{Ef}(S)\}.$$

Definition: Ein Divisor (\mathbb{Q} -Divisor) D heißt *nef* (*numerically effective*, bzw. *numerically eventually free*), falls für alle irreduziblen Kurven C gilt $D.C \geq 0$.

Bemerkung:

- (i) Die nef \mathbb{Q} -Divisoren sind die rationalen Punkte in $\text{Nef}(S)$.
- (ii) $\text{Nef}(S) \subset \overline{C^+(S)}$. Nach Korollar I.6.4 ist nämlich $C^+(S) \subset \text{Ef}(S)$. Also gilt

$$\text{Nef}(S) = \text{Ef}(S)^\vee \subset C^+(S)^\vee = \overline{C^+(S)}.$$

Wir werden die folgenden beiden Aussagen benötigen.

Theorem I.6.5 *Es sind äquivalent:*

- (i) \mathcal{L} ist *ampel*
- (ii) für jede kohärente Garbe \mathcal{F} auf X gibt es eine Zahl n_0 , so daß $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ für $n \geq n_0$ und $i > 0$.

Beweis. [Ha, Proposition III.5.3] \square

Korollar I.6.6 *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus projektiver Varietäten mit endlichen Fasern. Es sei \mathcal{L} ein Geradenbündel auf Y . Dann ist \mathcal{L} genau dann ampel, wenn $f^*(\mathcal{L})$ ampel ist.*

Beweis. [Ha, Exercise III.9.7] in Verbindung mit [Ha, Exercise III.11.2] \square

Ziel ist es nun, das folgende numerische Kriterium für ample Divisoren auf einer projektiven Fläche S zu beweisen.

Theorem I.6.7 (Nakai-Moishezon) *Ein Divisor D auf einer Fläche S ist genau dann ampel, wenn $D^2 > 0$ und $D.C > 0$ für alle irreduziblen Kurven C auf S ist.*

Zum Beweis benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Lemma I.6.8 *Es seien A, B effektive Divisoren auf S . Sei $C = A + B$. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_A(-B) \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{\text{rest}} \mathcal{O}_B \rightarrow 0.$$

Beweis. Man hat die natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_B/\mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{\text{rest}} \mathcal{O}_B \longrightarrow 0.$$

Nun ist $\mathcal{I}_B = \mathcal{O}_S(-B)$, $\mathcal{I}_A = \mathcal{O}_S(-A)$ und $\mathcal{I}_C = \mathcal{O}_S(-A-B)$. Tensoriert man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-A) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

mit $\mathcal{O}_S(-B)$ so erhält man

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-A-B) \longrightarrow \mathcal{O}_S(-B) \longrightarrow \mathcal{O}_A(-B) \longrightarrow 0$$

also

$$\mathcal{I}_B/\mathcal{I}_C = \mathcal{O}_A(-B).$$

□

Lemma I.6.9 *Es sei $C \subset S$ eine Kurve. Sei $C = \sum_{i=1}^k C_i$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Ein Geradenbündel \mathcal{L} auf C ist genau dann ampel, wenn $\mathcal{L}|_{C_i}$ ampel ist für alle Komponenten C_i .*

Beweis. Ist \mathcal{L} ampel, so ist natürlich $\mathcal{L}|_{C_i}$ ampel. Um die Umkehrung zu sehen, betrachten wir eine kohärente Garbe \mathcal{F} auf der Kurve $C = A + B$, mit $A := C_1$ und $B := \sum_{i=2}^k C_i$. Unter Verwendung von Lemma (I.6.8) finden wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_B = \mathcal{F}|_B \longrightarrow 0$$

wobei \mathcal{G} eine kohärente \mathcal{O}_A -Garbe ist. Tensorieren mit $\mathcal{L}^{\otimes n}$ gibt

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_A \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_B \longrightarrow 0.$$

Wir machen nun Induktion nach k . Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Die Aussage sei nun richtig für $k - 1$. Dann gibt es nach Theorem I.6.5 Zahlen n_0, n_1 mit

$$\begin{aligned} H^i(A, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_A) &= 0, \quad n \geq n_0, i \geq 1 \\ H^i(B, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_B) &= 0, \quad n \geq n_1, i \geq 1 \end{aligned}$$

Also folgt

$$H^i(C, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0, \quad n \geq \max(n_0, n_1), i \geq 1.$$

Wiederum nach Theorem I.6.5 ist dann \mathcal{L} ampel auf C . □

Beweis von Theorem I.6.7: Wenn D ampel ist, so liefert mD für $m \gg 0$ eine Einbettung. Also ist $m^2 D^2 > 0$ und $mD.C > 0$ für jede irreduzible Kurve C . Damit gilt auch $D^2 > 0$, sowie $D.C > 0$.

Es sei nun $D^2 > 0$ und $D.C > 0$ für jede Kurve C . Aus letzterem folgt, daß für jeden ampelen Divisor H auch $D.H > 0$ gilt. Damit ist nach Lemma I.6.3 der Divisor mD effektiv für $m \gg 0$. Nach eventuellem Übergang von D zu mD können wir also annehmen, daß D effektiv ist. Wir betrachten das Geradenbündel $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(D)$. Wir behaupten zunächst, daß $\mathcal{L}|_D$ ein amples Geradenbündel ist. Sei dazu $D = \sum_{i=1}^k C_i$. Nach Lemma I.6.9 genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{L}|_{C_i}$ für alle i ampel ist. Es sei $\nu_i : C_i \longrightarrow C$ die Normalisierung. Nach

Korollar I.6.6 wiederum reicht es aus zu zeigen, daß $\nu_i^*(\mathcal{L}|_{C_i})$ ampel ist. Dies folgt aber, da $\deg(\nu_i^*(\mathcal{L}|_{C_i})) = D.C_i > 0$.

Das nächste Ziel ist, zu zeigen, daß $\mathcal{L}^{\otimes n}$ für $n \gg 0$ global erzeugt ist. Da $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(D)$ und D effektiv ist, gibt es einen Schnitt, der genau auf D verschwindet. Damit ist \mathcal{L} außerhalb von D global erzeugt. Wir betrachten nun die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{O}_S(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

Getwistet mit $\mathcal{L}^{\otimes n}$ ergibt dies

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n-1} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}|_D \longrightarrow 0.$$

Die zugehörige lange Kohomologiesequenz lautet

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S, \mathcal{L}^{\otimes n-1}) &\longrightarrow H^0(S, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{L}^{\otimes n}|_D) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1(S, \mathcal{L}^{\otimes n-1}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{L}^{\otimes n}|_D) \longrightarrow \end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}|_D$ ampel ist, ist $H^1(D, \mathcal{L}^n|_D) = 0$ für $n \gg 0$. Also folgt

$$h^1(S, \mathcal{L}^{\otimes n}) \leq h^1(S, \mathcal{L}^{\otimes n-1})$$

für $n \geq n_0$. Diese Zahlenfolge muß für $n \geq n_1$ ab einem gewissen n_1 stationär werden. Also gilt für $n \geq n_1$ daß

$$H^0(S, \mathcal{L}^n) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{L}^n|_D)$$

surjektiv ist. Nun ist $\mathcal{L}|_D$ ampel. Also ist $\mathcal{L}^n|_D$ für $n \gg 0$ global erzeugt. Nach obigem liften die Schnitte von $\mathcal{L}^n|_D$ zu globalen Schnitten in \mathcal{L}^n . Nach dem Lemma von Nakayama erzeugen diese Schnitte dann den Halm von \mathcal{L}^n in jedem Punkt von D .

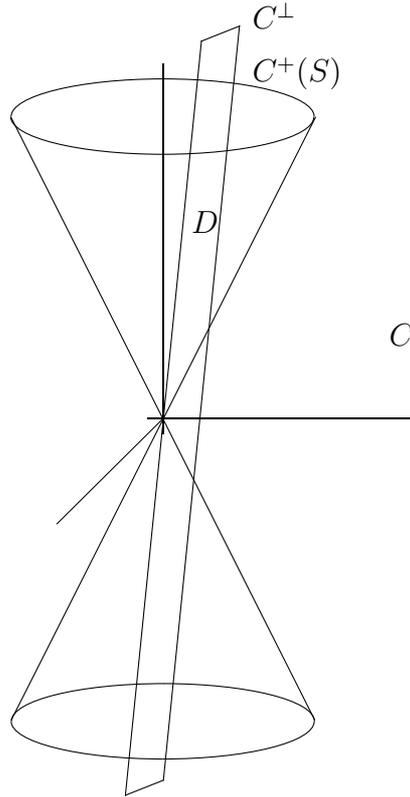
Es sei nun n so groß gewählt, daß \mathcal{L}^n global erzeugt ist. Dann erhalten wir einen Morphismus

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi|_{\mathcal{L}^n} : S &\longrightarrow \mathbb{P}^N. \\ \mathcal{L}^n &= \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1). \end{aligned}$$

Die nächste Behauptung ist, daß φ endliche Fasern hat. Ansonsten gäbe es eine Kurve C , so daß $\varphi(C)$ ein Punkt ist. Dann wäre aber $(\mathcal{L}^n \cdot \mathcal{O}_S(C)) = 0$, also $D.C = 0$ ein Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Da φ endliche Fasern hat, folgt die Ampelheit von \mathcal{L}^n , und damit von \mathcal{L} , nun aus Korollar I.6.6. \square

Satz I.6.10 *Ein Divisor D auf S ist genau dann ampel, wenn $(D.C) > 0$ für alle $C \in \overline{\text{Ef}}(S) \setminus \{0\}$.*

Beweis. Sei zunächst D ampel. Dann gilt $(D.C') > 0$ für alle effektiven Divisoren C' , also gilt $D.C \geq 0$ für alle $C \in \overline{\text{Ef}}(S)$. Es sei nun $C \neq 0$. Wir müssen zeigen, daß $(D.C) \neq 0$. Angenommen es sei $D.C = 0$. Da D im Inneren von $C^+(S)$ liegt, gibt es dann rationale Punkte $E \in C^+(S)$ mit $C.E < 0$. Nach Lemma (I.6.3) können wir annehmen, daß E ein effektiver Divisor ist.



Der Divisor $nD + E$ ist ampel für $n \gg 0$ (benutze das Nakai-Moishezon Kriterium).
Nun gilt

$$(nD + E).C = n(D.C) + E.C < 0,$$

ein Widerspruch.

Um die Umkehrung zu beweisen, genügt es nach dem Nakai-Moishezon Kriterium zu zeigen, daß $D^2 > 0$. Wir wählen zunächst einen festen ampelen Divisor H auf S . Die Funktion

$$f : \overline{\text{Ef}(S)} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(C) = (D.C)/(H.C)$$

ist invariant bezüglich Multiplikation mit Skalaren, nimmt also alle ihre Werte bereits auf der Einheitssphäre B an. Es sei ε das Minimum von f auf der kompakten Menge $B \cap \overline{\text{Ef}(S)}$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$(D - \frac{1}{2}\varepsilon H).C > 0 \text{ für alle } C \in \overline{\text{Ef}(S)} \setminus \{0\}.$$

Damit ist $D - \frac{1}{2}\varepsilon H$ insbesondere nef. Da $\text{Nef}(S) \subset \overline{C^+(S)}$ gilt, ist insbesondere der Selbstschnitt von $D - \frac{1}{2}\varepsilon H$ nicht negativ. Es folgt nun, daß

$$(D.D) = (((D - \frac{1}{2}\varepsilon H) + \frac{1}{2}\varepsilon H).((D - \frac{1}{2}\varepsilon H) + \frac{1}{2}\varepsilon H))$$

$$= (D - \frac{1}{2}\varepsilon H)^2 + \varepsilon(D - \frac{1}{2}\varepsilon H).H + \frac{1}{4}\varepsilon^2 H^2 > 0.$$

□

Korollar I.6.11 Die ampelen \mathbb{Q} -Divisoren auf S bilden einen offenen konvexen Kegel in $N_{\mathbb{Q}}(S)$, dessen Abschluß der Nef-Kegel ist.

Beweis. Zunächst folgt unmittelbar aus dem Nakai-Moishezon Kriterium, daß die amplen Divisoren einen konvexen Kegel bilden, und daß dieser in $\text{Nef}(S)$ enthalten ist.

Wir zeigen nun, daß der Kegel der amplen Divisoren offen ist. Dazu sei B wieder die Einheitsphäre und $K = B \cap \overline{\text{Ef}(S)}$. Wir betrachten für einen festen amplen Divisor H die Funktion

$$f : B \times K \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(D, C) = \frac{(D.C)}{(H.C)}.$$

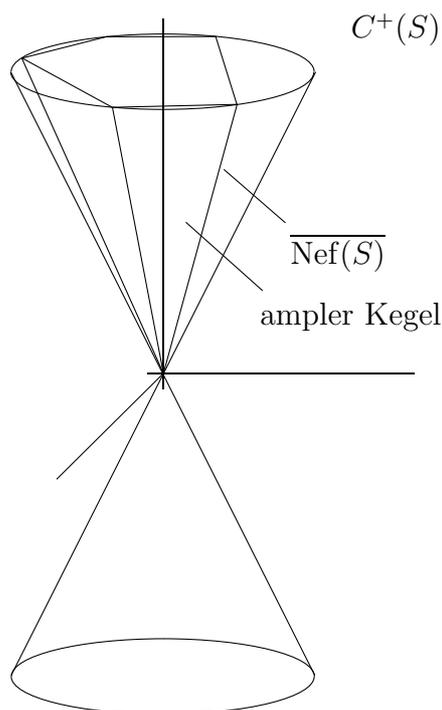
Da f beschränkt ist, gibt es ein $t_0 > 0$ mit $f(D.C) < 1/t_0$, d.h. da $H.C > 0$ folgt

$$tD.C > H.C \text{ für } t \in [0, t_0].$$

Damit ist $(H - tD).C > 0$ für $D \in B$ und $t \in [0, t_0]$. Analog zeigt man $(H - tD)^2 > 0$ für $t \in [0, t_1]$ für ein geeignetes $t_1 > 0$. Nach dem Nakai-Moishezon Kriterium folgt, daß der ample Kegel offen ist.

Da $\text{Nef}(S)$ konvex ist und innere Punkte besitzt, nämlich den ample Kegel, ist $\text{Nef}(S)$ der Abschluß seiner inneren Punkte. Liegt D im Inneren von $\text{Nef}(S)$, so gilt $D.C > 0$ für alle $C \in \overline{\text{Ef}(S)} \setminus \{0\}$ (vgl. den Beweis von Satz (I.6.10)) und $D^2 > 0$, also ist D ample. \square

Wir haben damit folgendes Bild



II Birationale Geometrie von Flächen

2.1 Der σ -Prozeß

Es sei S eine Fläche und P ein Punkt auf S . Der σ -Prozeß „ersetzt“ den Punkt P durch einen \mathbb{P}^1 . Genauer gesagt, wird eine Fläche \tilde{S} zusammen mit einer Abbildung $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ konstruiert, so daß gilt:

- (i) $\pi|_{\tilde{S} \setminus \pi^{-1}(P)} : \tilde{S} \setminus \pi^{-1}(P) \xrightarrow{\sim} S \setminus \{P\}$ ist ein Isomorphismus.
- (ii) $\pi^{-1}(P) = E$ ist isomorph zu \mathbb{P}^1 .

Um die *Konstruktion* zu beschreiben, sei U eine Umgebung von S mit lokalen Koordinaten x, y . In $U \times \mathbb{P}^1$ betrachten wir

$$\tilde{U} := \{((x, y), (X : Y)) \in U \times \mathbb{P}^1; \quad xY - yX = 0\}.$$

Die natürliche Projektion $p_U^r : U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow U$ liefert durch Einschränkung eine Abbildung $\pi_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$. Die Fläche \tilde{S} erhalten wir durch Identifikation

$$\tilde{S} = S \setminus \{P\} \cup_U \tilde{U}.$$

Wir weisen nun die Eigenschaften (i), (ii) nach. Es genügt, dies für U zu tun.

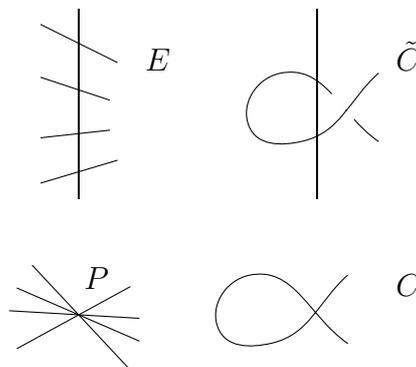
- (i) Es sei etwa $x \neq 0$. Dann ist $Y/X = y/x$, d.h. über (x, y) liegt genau ein Punkt in \tilde{U} . Analog für $y \neq 0$.
- (ii) Nach Konstruktion ist $\pi^{-1}\{(0, 0)\} = \{(0, 0)\} \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1$.

Bemerkungen:

- (i) Die Konstruktion ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.
- (ii) Ist $S \subset \mathbb{P}^n$, so ist $\tilde{S} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ und π ist durch die Einschränkung der Projektion auf \mathbb{P}^n gegeben. Also sind \tilde{S} und π algebraisch.
- (iii) Es sei \mathcal{I} die Idealgarbe von P in S . Dann gilt

$$\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d.$$

Man kann den σ -Prozeß durch folgendes Bild veranschaulichen:



Die Punkte auf E entsprechen den Tangentenrichtungen in $P(y/x = Y/X)$.

Definition: Für eine Kurve $C \subset S$ heißt

$$\tilde{C} := \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{P\})}$$

das *eigentliche (strikte) Urbild* von C .

Lemma II.1.1 Die Multiplizität der Kurve C im Punkt P sei m . Dann gilt:

$$\pi^*C = \tilde{C} + mE.$$

Beweis. In geeigneten lokalen Koordinaten ist C gegeben durch $f = 0$ mit

$$f = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \dots$$

wobei die f_k homogen vom Grad k sind. Wir können annehmen, daß $\{y = 0\}$ nicht tangential ist zu C in P (d.h. $f_m(x, y)$ spaltet y nicht als Faktor ab). Es gilt also $f_m(1, 0) \neq 0$. In der Nähe des Punktes $(1 : 0) \in E$ geben x und $t = Y/X$ lokale Koordinaten auf \tilde{S} . Dann gilt $y = x(Y/X) = xt$. Wir erhalten

$$(1) \quad \pi^*f = f(x, tx) = x^m[f_m(1, t) + xf_{m+1}(1, t) + \dots].$$

Wegen $f_m(1, 0) \neq 0$ ist $\tilde{C} \cap E$ endlich und die Behauptung folgt. □

Satz II.1.2 Es sei $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ der σ -Prozeß im Punkt P . Dann gilt:

(i) Es gibt einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Pic } S \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow \text{Pic } \tilde{S} \\ (D, n) &\longmapsto \pi^*D + nE. \end{aligned}$$

(ii) $(\pi^*D) \cdot (\pi^*D') = D \cdot D'$, $(\pi^*D) \cdot E = 0$, $E^2 = -1$.

(iii) $NS(\tilde{S}) = NS(S) \oplus \mathbb{Z}$.

(vi) $K_{\tilde{S}} = \pi^*K_S + E$.

Beweis. (ii) Die beiden ersten Aussagen folgen aus dem Moving Lemma (I.2.5). Es sei nun C eine glatte Kurve auf S durch P . Dann ist (vgl.(1)) die Kurve \tilde{C} ebenfalls glatt und schneidet E transversal in einem Punkt. Aus

$$0 = (\pi^*C) \cdot E = (\tilde{C} + E) \cdot E = 1 + E^2$$

folgt sofort $E^2 = -1$.

(i) Wir zeigen zunächst, daß die angegebene Abbildung surjektiv ist. Ist D ein Divisor auf \tilde{S} , so gilt $D = \pi^*\pi_*D + nE$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Es sei nun $\pi^*D + nE = 0$. Aus $(\pi^*D + nE) \cdot E = -n$ folgt sofort $n = 0$. Ist $\pi^*D = 0$, so gibt es eine rationale Funktion f auf \tilde{S} mit $\pi^*D = (f)$. Damit gilt $(D) = (f)$ auf $S \setminus \{P\}$ und damit auf S . Also folgt $D = 0$.

(iii) Analog.

(iv) Klarerweise gilt $K_{\tilde{S}} = \pi^*K_S + nE$ für ein n . Nach der Adjunktionsformel erhält man

$$K_E = (K_{\tilde{S}} + E)|_E = (\pi^*K_S + (n+1)E)|_E.$$

Da $E \cong \mathbb{P}^1$ ist

$$-2 = \deg K_E = (n+1)E^2 = -(n+1).$$

Also $n = 1$. □

Bemerkung: Mit Hilfe von holomorphen Differentialen kann man die letzte Bemerkung auch so beweisen: Sei $\omega = dx \wedge dy$. Mit $t = Y/X$ und $y = xt$ folgt

$$\pi^*\omega = dx \wedge d(xt) = xdx \wedge dt.$$

Dies zeigt, daß das zurückgeholte Differential auf E eine einfache Nullstelle hat, d.h. $\pi^*K_S = K_{\tilde{S}}(-E)$.

2.2 Rationale Abbildungen

Es sei S eine projektive Fläche und

$$\varphi : S \dashrightarrow X$$

eine rationale Abbildung in eine projektive Varietät X . Wir können o.E. $X = \mathbb{P}^n$ nehmen. Dann gibt es stets eine endliche Menge F , so daß

$$\varphi : S \setminus F \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

ein Morphismus ist. Ist $C \subset S$ eine Kurve, so ist $\varphi(C)$ stets definiert. Die Einschränkungabbildung induziert einen Isomorphismus

$$\text{Pic}S \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(S \setminus F).$$

Also können wir $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ stets als Geradenbündel auf S auffassen.

Es sei nun \mathcal{L} ein Geradenbündel auf S und $V \subset H^0(S, \mathcal{L})$ ein Linearsystem.

Definition:

- (i) Der *Basisort* von V ist der Durchschnitt aller effektiven Divisoren $D, D \in V$.
- (ii) Eine Kurve C heißt *Basiskomponente* von V , falls sie im Basisort von V enthalten ist.
- (iii) Der *Basisdivisor* von V ist die maximale Kurve (als Schema), die im Basisort von V enthalten ist.

Es sei D_0 der Basisdivisor von V , und $D \in V$. Dann besitzt $|D - D_0|$ höchstens endlich viele Basispunkte. Besitzt ein Linearsystem V keine Basiskomponenten, so ist die Anzahl der Basispunkte höchstens D^2 , wobei $D \in V$.

Ist V ein Linearsystem ohne Basisdivisor, so liefert V eine rationale Abbildung.

$$\varphi_V : S \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$$

Ist umgekehrt

$$\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

eine rationale Abbildung, so ist $\varphi^*(\mathcal{H})$ ein Linearsystem ohne Basisdivisor.

Theorem II.2.1 *Es sei $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ eine rationale Abbildung. Dann gibt es eine Abbildung $\eta : S' \rightarrow S$, zusammengesetzt aus endlich vielen σ -Prozeßen und einen Morphismus $f : S' \rightarrow \mathbb{P}^n$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} & S' & \\ \eta \swarrow & & \searrow f \\ S & \dashrightarrow \varphi & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Beweis. Wir können zunächst annehmen, daß $\varphi(S)$ den Raum \mathbb{P}^n aufspannt. Dann ist $|D| = \varphi^*|H|$ ein Linearsystem mit höchstens endlich vielen Basispunkten. Falls keine Basispunkte vorliegen, ist φ bereits ein Morphismus, und es ist nichts zu zeigen. Sei nun P_1 ein Basispunkt. Es sei $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ der σ -Prozeß in P_1 . Wir wählen k_1 maximal, so daß $k_1 E_1$ im Basisdivisor von $|D|$ liegt. Nach Voraussetzung ist $k_1 > 0$. Das Linearsystem $|D_1| = |\pi_1^* D - k_1 E_1|$ hat keinen Basisdivisor. Für die zugehörige Abbildung $f_1 : S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow f_1 \\ S & \dashrightarrow \varphi & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Ist $|D_1|$ basispunktfrei, so sind wir fertig. Ansonsten wiederholen wir dies Verfahren, und erhalten induktiv Linearsysteme $|D_n| = |\pi_n^* D_{n-1} - k_n E_n|$ und rationale Abbildungen $f_n : S_n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Es gilt

$$D_n^2 = D_{n-1}^2 - k_n^2 < D_{n-1}^2.$$

Da die Linearsysteme $|D|$ alle nur endlich viele Basispunkte besitzen, gilt $D_n^2 \geq 0$. Also muß dieses Verfahren abbrechen, und wir erhalten das gesuchte Diagramm. \square

Beispiele:

- (i) Es sei $S \subset \mathbb{P}^n$. Projektion von einem Punkt $P \in S$ gibt eine rationale Abbildung $P : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$. Es sei $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ der σ -Prozeß in P . Zieht man vom Linearsystem der Hyperebenen durch P den exceptionellen Divisor ab, so erhält man ein basispunktfreies Linearsystem $|\tilde{H}|$. Dies induziert einen Morphismus $\tilde{p} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, so daß

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \tilde{p} \\ S & \dashrightarrow P & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

kommutiert. Es gilt $\tilde{H}^2 = H^2 - 1 = \deg S - 1$.

- (ii) Es sei $Q \subset \mathbb{P}^3$ eine Quadrik. Projiziert man von einem Punkt $P \in Q$, so werden die Geraden durch P auf verschiedene Punkte $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{P}^2$ abgebildet. Es sei $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ der σ -Prozeß in P . Die Abbildung $\tilde{p} : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{P}^2$ ist birational und kontrahiert zwei Kurven. (\tilde{Q} ist die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in P_1 und P_2 , vgl. die nachfolgende Diskussion). Insbesondere zeigt dies, daß $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und \mathbb{P}^2 birational sind.

Im folgenden werden wir sehen, daß sich alle birationalen Abbildungen aus σ -Prozeßen (und Isomorphismen) zusammensetzen lassen.

Lemma II.2.2 *Es sei S eine projektive 2-dimensionale Varietät. S' sei eine projektive (glatte) Fläche. Es sei $f : S \rightarrow S'$ ein birationaler Morphismus. Ist f^{-1} in einem Punkt $P' \in S'$ nicht definiert, so ist $f^{-1}(P')$ eine Kurve.*

Beweis. Zunächst ist $f^{-1}(P')$ nicht leer. Die Aussage ist lokaler Natur. Wir betrachten also einen Punkt in $f^{-1}(P')$ und ersetzen S durch eine affine Varietät, d.h. wir können $j : S \subset \mathbb{C}^n$ annehmen. Die Abbildung $j \circ f^{-1} : S' \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ ist durch n rationale Funktionen gegeben. Wir können annehmen, daß die erste dieser Funktionen in P' nicht definiert ist, d.h. daß sie von der Gestalt g/h mit g, h teilerfremd und $h(P') = 0$ ist. Nach Konstruktion gilt

$$(2) \quad f^*(g) = x_1 f^*(h)$$

wobei x_1 die erste Koordinatenfunktion auf \mathbb{C}^n ist. Es sei D die Kurve auf S , die durch $f^*(h)$ gegeben ist. Wegen (2) verschwindet auch $f^*(g)$ auf D . Insbesondere ist $g(P') = 0$. Also gilt, daß $D = f^{-1}(D')$ mit $D' = \{g = h = 0\}$. Da g, h teilerfremd sind, kann man nach eventuellem Verkleinern von S annehmen, daß $D' = \{P'\}$. Also ist $f^{-1}(P')$ eine Kurve. \square

Lemma II.2.3 *Es sei $\varphi : S \dashrightarrow S'$ eine birationale Abbildung zwischen Flächen. Die Abbildung φ^{-1} sei im Punkt $P' \in S'$ nicht definiert. Dann gibt es eine Kurve C mit $\varphi(C) = P'$.*

Beweis. Es sei $\varphi|_U : U \rightarrow S'$ die Einschränkung von φ auf das maximale Definitionsgebiet von φ . Wir betrachten den Graph Γ von $\varphi|_U$, d.h.

$$\Gamma = \{(u, \varphi(u)); u \in U\} \subset U \times S'$$

Es sei $S_1 = \overline{\Gamma} \subset S \times S'$. Dann ist S_1 ein projektives 2-dimensionales Schema. Mit den Projektionen q , bzw. q' auf S , bzw. S' haben wir ein kommutatives Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ q \swarrow & & \searrow q' \\ S & \dashrightarrow \varphi & S' \end{array}$$

Da φ^{-1} in P' nicht definiert ist, gilt dies auch für $(q')^{-1}$. Also gibt es eine Kurve $C_1 \subset S_1$ mit $q'(C_1) = P'$. Da $C_1 \subset S \times S_1$ und $q'(C_1)$ ein Punkt ist, ist $C = q(C_1)$ eine Kurve. Es gilt $\varphi(C) = P'$. \square

Satz II.2.4 (Universelle Eigenschaft des σ -Prozeßes:) *Es sei $f : S' \rightarrow S$ ein birationaler Morphismus. Ist f^{-1} in einem Punkt $P \in S$ nicht definiert, und ist $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ die Aufblasung in P , so gibt es einen birationalen Morphismus $g : S' \rightarrow \tilde{S}$, so daß*

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ g \nearrow & & \searrow \pi \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Es ist klar, daß g , falls es existiert, birational ist. Wir betrachten

$$g : S' \xrightarrow{f} S \xrightarrow{\pi^{-1}} \tilde{S}.$$

Natürlich genügt es zu zeigen, daß g ein Morphismus ist. Es sei $Q \in S'$ ein Punkt, in dem g nicht definiert ist. Dann gibt es nach Lemma (II.2.3) eine Kurve C in \tilde{S} mit $f^{-1} \circ \pi(C) = Q$ also $\pi(C) = f(Q)$. Die einzige Kurve, die unter π kontrahiert wird ist E , also gilt $C = E$ und $f(Q) = P$.

Es sei m_Q das maximale Ideal von Q in S' . Wir behaupten, daß es eine lokale Koordinate $y \in \mathcal{O}_{S,P}$ gibt mit $f^*(y) \in m_Q^2$. Dazu seien $x, t \in \mathcal{O}_{S,P}$ lokale Koordinaten. Falls $f^*(x) \notin m_Q^2$, so verschwindet $f^*(x)$ mit Multiplizität 1 auf $f^{-1}(P)$ bei Q (dies ist nach Voraussetzung eine Kurve). Damit ist $f^*(x)$ eine lokale Gleichung für $f^{-1}(P)$ bei Q . Es folgt (vgl. Beweis von Lemma (II.2.2)), daß $f^*(t) = u f^*(x)$ für ein $u \in \mathcal{O}_{S',Q}$. Wir setzen $y := t - u(Q)x$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^*(y) &= f^*(t) - u(Q)f^*(x) \\ &= (u - u(Q)) \cdot f^*(x) \in m_Q^2 \end{aligned}$$

Es sei nun $e \in E$ ein Punkt, in dem g^{-1} definiert ist. Dann gilt

$$(g^{-1})^* f^*(y) = \pi^*(y) \in m_e^2.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da y eine lokale Koordinate ist. Damit schneidet $\pi^*(y)$ den exzeptionellen Divisor E in genau einem Punkt transversal. \square

Bemerkung: Es gibt auch noch folgende universelle Eigenschaft des σ -Prozesses. Es sei $h : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^n$ ein Morphismus, der die exzeptionelle Kurve E kontrahiert. Dann faktorisiert h über S , d.h. es gibt einen Morphismus $h' : S \rightarrow \mathbb{P}^n$ so daß

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & & \\ \pi \downarrow & \searrow h & \\ S & \xrightarrow{h'} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

kommutiert. Der Beweis hiervon ist einfach. Es sei $h(E) = Q$. Wir können annehmen, daß $Q \in U_0 = \{x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$. Damit sind $h_1/h_0, \dots, h_n/h_0$ reguläre Funktionen in einer Umgebung von E , und damit in einer Umgebung von $P = \pi(E)$. Damit sind diese Funktionen auch in P regulär, und definieren die gesuchte Abbildung h' .

Theorem II.2.5 *Es sei $f : S \rightarrow S_0$ ein birationaler Morphismus. Dann gibt es Aufblasungen $\pi_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, sowie einen Isomorphismus $\mu : S \xrightarrow{\sim} S_n$ mit $f = \mu \circ \pi_n \circ \dots \circ \pi_1$.*

Beweis. Ist f ein Isomorphismus, so ist man fertig. Ansonsten ist f^{-1} in einem Punkt nicht definiert. Es sei $\pi_1 : S_1 \rightarrow S_0$ die Aufblasung in diesem Punkt. Nach Satz (II.2.4) gibt es einen Morphismus $f_1 : S \rightarrow S_1$ so daß

$$\begin{array}{ccc} S & & \\ f_1 \downarrow & \searrow f & \\ S_1 & \xrightarrow{\pi_1} & S_0 \end{array}$$

kommutiert. Jede Kurve in S , die durch f_1 kontrahiert wird, wird auch durch f kontrahiert. Andererseits kontrahiert f strikt mehr Kurven als f_1 , nämlich jene Kurven, die über der exzeptionellen Kurve $E_1 \subset S_1$ liegen. Ist f_1^{-1} überall definiert, ist man fertig. Ansonsten wendet man das Verfahren erneut an. Dieser Prozeß muß abbrechen, da f nur endlich viele Kurven kontrahiert. \square

Korollar II.2.6 *Ist $f : S \dashrightarrow S'$ eine birationale Abbildung zwischen Flächen, so gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} & S'' & \\ h \swarrow & & \searrow g \\ S & \overset{f}{\dashrightarrow} & S' \end{array}$$

wobei g und h aus Isomorphismen und σ -Prozeßen zusammengesetzt sind.

Beweis. Unmittelbar aus Theorem (II.2.1) und Theorem (II.2.5). \square

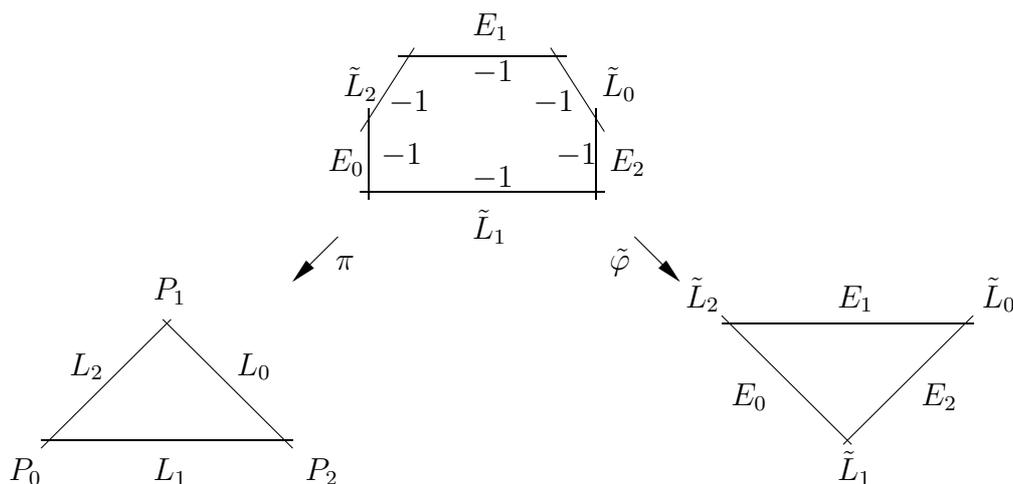
Beispiel: Wir betrachten

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ \varphi(x_0, x_1, x_2) &= (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist überall definiert bis auf die drei Basispunkte $P_0 = (1 : 0 : 0)$, $P_1 = (0 : 1 : 0)$, $P_2 = (0 : 0 : 1)$. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathbb{P}}_2(P_0, P_1, P_2) & \\ \pi \swarrow & & \searrow \tilde{\varphi} \\ \mathbb{P}^2 & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

wobei π die Aufblasung in den Punkten P_i ; $i = 1, 2, 3$, ist. Es ergibt sich folgendes Bild



Definition:

- (i) Eine Fläche S_1 dominiert die Fläche S_2 , falls es einen *birationalen Morphismus* $f : S_1 \rightarrow S_2$ gibt.

- (ii) Eine Fläche S heißt *minimal*, wenn jeder birationale Morphismus $f : S \rightarrow S'$ ein Isomorphismus ist.

Satz II.2.7 *Jede Fläche S dominiert eine minimale Fläche, d.h. es gibt einen birationalen Morphismus $f : S \rightarrow S'$ auf eine glatte minimale Fläche S' . Die Fläche S entsteht also aus einer minimalen Fläche S' durch endlich viele Aufblasungen und Isomorphismen.*

Beweis. Die letzte Aussage folgt aus Theorem (II.2.5). Ist S nicht minimal gibt es einen Morphismus $f_1 : S \rightarrow S_1$. Dieser besteht aus endlich vielen σ -Prozessen (und Isomorphismen). Es ist $rk NS(S_1) < rk NS(S)$. Ist S_1 minimal, so ist man fertig. Ansonsten setze man dieses Verfahren fort. Da der Rang der Nèron-Severigruppe stets abnimmt, muß dieses Verfahren zu einem Ende kommen. \square

Definition: Ein *minimales Modell* einer Fläche S ist eine Fläche S' , die zu S birational äquivalent und minimal ist.

Bemerkung: Wir haben also insbesondere bewiesen, daß jede Fläche ein glattes minimales Modell besitzt. In höhere Dimensionen muß man für minimale Modelle Singularitäten in Codimension ≥ 3 zulassen. Die Existenz minimaler Modelle wurde für Dimension 3, 4 gezeigt (Mori).

Man kann das *Klassifikationsproblem* für Flächen in zwei Teile aufspalten:

- 1) *Birationale Äquivalenz:* Man bestimme alle Äquivalenzklassen modulo birationaler Äquivalenz.
- 2) *Minimale Modelle:* Man bestimme für eine gegebene birationale Äquivalenzklasse alle minimalen Modelle.

Definition: Eine Kurve E auf S heißt *exzeptionelle Kurve der 1. Art* (oder *(-1)-Kurve*), falls es einen σ -Prozeß $\pi : S \rightarrow S'$ gibt, so daß E exzeptionelle Kurve dieses σ -Prozesses ist.

Theorem II.2.8 *Eine Kurve E ist genau dann exzeptionell, wenn E glatt rational ist, und $E^2 = -1$ gilt.*

Beweis. Falls E exzeptionell ist, ist E glatt rational, und es gilt $E^2 = -1$.

Es sei nun E glatt rational mit $E^2 = -1$. Wir können (nach Serre's Theoremen) einen sehr amplen Divisor H wählen mit $H^1(\mathcal{O}_S(H)) = 0$. Es sei $d = H.E$. Wir betrachten

$$H' = H + dE.$$

Dann gilt $H'.E = 0$. Wir wollen zeigen, daß $|H'|$ einen Morphismus $\varphi : S \rightarrow S'$ definiert, so daß S' glatt ist, $\varphi(E) = P$ ein Punkt ist (dies folgt, da $H'.E = 0$ ist, d.h. φ muß E kontrahieren), und so daß $\varphi|_{S \setminus E} : S \setminus E \rightarrow S' \setminus \{P\}$ ein Isomorphismus ist. Es folgt dann aus der Bemerkung nach Satz (II.2.4), daß φ der σ -Prozeß bezüglich $P \in S'$ ist.

Wir wollen nun eine spezielle Basis von $H^0(\mathcal{O}_S(H'))$ konstruieren. Zunächst betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(H + (i - 1)E) \xrightarrow{s} \mathcal{O}_S(H + iE) \rightarrow \mathcal{O}_E(d - i) \rightarrow 0 \quad i = 1, \dots, d.$$

Wegen $H^1(\mathcal{O}_S(H)) = 0$, folgt, daß auch $H^1(\mathcal{O}_S(H + iE)) = 0$ für $i = 1, \dots, d$. Ferner sind die Abbildungen $H^0(\mathcal{O}_S(H + iE)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_E(d - i))$ surjektiv für $i = 1, \dots, d$. Es sei nun $\{s_0, \dots, s_n\}$ Basis von $H^0(\mathcal{O}_S(H))$. Ferner können wir Elemente $s_{i,0}, \dots, s_{i,d-1}$ von $H^0(\mathcal{O}_S(H + iE))$ so wählen, daß die Bilder eine Basis von $H^0(\mathcal{O}_E(d - i))$ sind. Mit Verwendung des Schnittes $s \in H^0(\mathcal{O}_S(E))$ erhalten wir dann folgende Basis von $H^0(\mathcal{O}_S(H'))$:

$$\{s^d s_0, \dots, s^d s_n, s^{d-1} s_{1,0}, \dots, s^{d-1} s_{1,d-1}, \dots, s s_{d-1,0}, s s_{d-1,1}, s_{d,0}\}.$$

Da $s_{d,0}$ auf E eine von Null verschiedene Konstante ist, sehen wir, daß durch $|H'|$ ein Morphismus φ definiert wird. Es gilt $\varphi(E) = (0 : \dots : 0 : 1) = P$. Es sei nun $U \subset S$ jene offene Menge in S , die durch $s_{d,0} \neq 0$ gegeben wird. Es ist $E \subset U$. Wir betrachten die folgenden Schnitte von $\mathcal{O}_U(-E)$:

$$x = \frac{s_{d-1,0}}{s_{d,0}}, \quad y = \frac{s_{d-1,1}}{s_{d,0}}$$

Diese Schnitte schränken sich auf eine Basis von $H^0(\mathcal{O}_E(1))$ ein. Nach eventuellem Verkleinern von U können wir also annehmen, daß x, y auf U keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Wir erhalten also eine Abbildung

$$h_2 = (x : y) : U \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Durch die Funktion (sx, sy) haben wir ferner eine Abbildung

$$h_1 = (sx, sy) : U \rightarrow \mathbb{C}^2.$$

Damit erhalten wir

$$h = (h_1, h_2) : U \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Wir haben $\tilde{\mathbb{C}}^2 \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$, wobei $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ der σ -Prozeß im Ursprung ist. Wegen $(sx)y - (sy)x = 0$ gilt $h(U) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$.

Es sei $\varphi : S \rightarrow S'$ der durch $|H'|$ gegebene Morphismus. Da φ eigentlich ist, ist $\varphi(U)$ offen in S' . Zusammen mit der Bemerkung nach Satz (II.2.4) erhalten wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & \tilde{\mathbb{C}}^2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Behauptung: Nach eventuellem Verkleinern von U liefert \bar{h} einen Isomorphismus von $\varphi(U)$ mit einer Umgebung des Ursprungs in \mathbb{C}^2 .

Es gilt zunächst:

(i) $h|_E$ ist ein Isomorphismus von E auf die exzeptionelle Gerade in $\tilde{\mathbb{C}}^2$.

(ii) Für jeden Punkt $Q \in E$ gibt es eine Umgebung, so daß h dort étale ist (d.h. sind z_1, z_2 lokale Koordinaten um $h(q)$, so sind $h^*(z_1), h^*(z_2)$ lokale Koordinaten um q). Insbesondere ist h um q lokal eine biholomorphe Abbildung.

(i) folgt unmittelbar aus der Konstruktion von h . Für (ii) können wir etwa annehmen, daß $h(q) = ((0, 0), (0 : 1))$. Verwenden wir Koordinaten $((U, V), (U : V))$ auf $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$,

so ist $\tilde{\mathbb{C}}^2$ gegeben durch $uV - vU = 0$. Um $((0,0), (0 : 1))$ können wir die Koordinaten $v, U/V$ wählen. Es ist

$$h^*(v) = sy, \quad h^*(U/V) = x/y.$$

$h^*(v)$ verschwindet mit Vielfachheit 1 auf E , während die Einschränkung von $h^*(U/V)$ auf E in q eine einfache Nullstelle besitzt. Dies ergibt (ii).

Wir verwenden nun folgendes Ergebnis aus der Topologie.

Lemma II.2.9 *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorffräumen. Es sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Es gelte*

- (i) $f|_K : K \rightarrow f(K)$ ist ein Homöomorphismus.
- (ii) Für alle Punkte $h \in K$ ist f ein lokaler Homöomorphismus um h .

Dann gibt es eine Umgebung W von K in X und eine offene Menge W' in Y , so daß $f|_W : W \rightarrow W'$ ein Homöomorphismus ist.

Wir arbeiten nun in der \mathbb{C} -Topologie weiter. Nach obigem Lemma gibt es eine Umgebung W von E in S , sowie eine Umgebung W' von $f(E)$ in $\tilde{\mathbb{C}}^2$, so daß $h|_W : W \rightarrow W'$ ein Homöomorphismus, und damit biholomorph ist. Wir betrachten $\varphi \circ h^{-1}|_W$. Nach der Bemerkung nach Satz (II.2.4) gilt $\varphi \circ h^{-1}|_W = g \circ \pi|_W$. Also ist g lokal invers zu \bar{h} . Damit ist \bar{h} lokal biholomorph um $P = \varphi(E)$. Damit ist P glatter Punkt von $\varphi(U)$ in der holomorphen, und damit auch in der algebraischen Kategorie. Dies beendet den Beweis von Theorem (II.2.8). \square

Korollar II.2.10 *Eine Fläche S ist genau dann minimal, wenn sie keine (-1) -Kurve enthält.*

In der Mori-Theorie ist es von entscheidender Bedeutung, ob K_S nef ist, oder nicht. Wir wollen dies zum Abschluß dieses Abschnittes beleuchten.

Definition:

- (i) Das n -te *Plurigeschlecht* von S ist definiert durch

$$P_n(S) = \dim H^0(S, nK_S). \quad (n \geq 1).$$

- (ii) Man sagt S habe die *Kodaira-Dimension* $-\infty$, falls $P_n(S) = 0$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Satz II.2.11

- (i) *Es sei C eine irreduzible Kurve mit $(K_S.C) < 0$ und $C^2 < 0$. Dann ist C eine (-1) -Kurve.*
- (ii) *Ist K nicht nef, so ist S nicht minimal, oder aber S hat Kodaira-Dimension $-\infty$.*

Beweis.

- (i) Die Adjunktionsformel gibt

$$2p(C) - 2 = K_S.C + C^2.$$

Da C irreduzibel ist, ist $p(C) \geq 0$. Es bleibt nur $p(C) = 0$, $K_S.C = -1$ und $C^2 = -1$ übrig. Damit ist C glatt rational und $C^2 = -1$.

(ii) Gibt es eine irreduzible Kurve mit $K_S.C < 0$ und $C^2 < 0$, so ist nach obigem S nicht minimal. Wenn dies nicht der Fall ist, so ist $K_S.C < 0$ für eine irreduzible Kurve C mit $C^2 \geq 0$. Angenommen, es gibt einen effektiven Divisor D mit $D \sim nK_S$, $n \geq 1$. Wir können $D = aC + R$ schreiben, wobei $a \geq 0$ und C in R nicht vorkommt. Dann gilt $D.C = aC^2 + aR.C \geq 0$. Andererseits ist $D.C = n(K_S.C) < 0$, ein Widerspruch. \square

Satz II.2.12 *Es seien S und S' Flächen. Ferner sei $f : S \dashrightarrow S'$ eine birationale Abbildung. Ist $K_{S'}$ nef, so ist f ein Morphismus. Ist zudem noch K_S nef, so ist f ein Isomorphismus.*

Beweis. Es sei S_1 eine Fläche und $\pi : \tilde{S}_1 \rightarrow S_1$ ein σ -Prozeß. Es sei $\tilde{C} \subset \tilde{S}_1$, eine irreduzible Kurve, so daß auch $C = \pi(\tilde{C})$ eine Kurve ist. Ist m die Multiplizität der Kurve C in dem Punkt $P \in S_1$, der aufgeblasen wird, so gilt

$$(K_{\tilde{S}_1}.\tilde{C}) = (\pi^*K_{S_1} + E).(\pi^*C - mE) = (K_{S_1}.C) + m \geq (K_{S_1}.C).$$

Ist also K_{S_1} nef, so ist $(K_{\tilde{S}_1}.\tilde{C}) \geq 0$. Es kann dann also keine Kurve \tilde{C} geben, mit $(K_{\tilde{S}_1}.\tilde{C}) < 0$, die unter π auf eine Kurve in S_1 abgebildet wird. Ist $g : S_2 \rightarrow S_1$ ein beliebiger birationaler Morphismus, so ist dieser aus σ -Prozeßen zusammengesetzt, und man erhält das Ergebnis: Ist K_{S_1} nef, so ist $K_{S_2}.\tilde{C} \geq 0$.

Wir betrachten nun $f : S \dashrightarrow S'$. Durch endliche Anwendung von σ -Prozeßen kann man die Unbestimmtheitsstellen beseitigen. Wir erhalten

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \tilde{f} \\ S & \dashrightarrow f \dashrightarrow & S' \end{array}$$

Die Anzahl der Aufblasungen sei minimal gewählt. Wenn wir annehmen, daß f Unbestimmtheitsstellen hat, gibt es mindestens eine Aufblasung. Es sei E der exzeptionelle Divisor der letzten Aufblasung. Wegen der Minimalität der Aufblasungen ist $\tilde{f}(E)$ eine Kurve in S' . Wenn $K_{S'}$ nef ist, folgt aus obigem, daß $(K_{\tilde{S}}.E) \geq 0$. Da aber $(K_{\tilde{S}}.E) = -1$, erhalten wir einen Widerspruch.

Die zweite Aussage erhalten wir durch Anwendung der selben Schlußweise auf f^{-1} . \square

III Rationale Flächen und Regelflächen

3.1 Regelflächen

Wir beginnen mit der

Definition:

- (i) Eine Fläche S heißt eine *Regelfläche*, falls S birational zu einem Produkt $C \times \mathbb{P}^1$ ist, wobei C eine glatte Kurve ist.
- (ii) S heißt *rational*, falls S birational zu $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist.

Bemerkung: Wir hatten bereits gesehen, daß $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ birational zur projektiven Ebene \mathbb{P}^2 ist. Also ist S genau dann rational, wenn S birational zu \mathbb{P}^2 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für den Funktionenkörper von S gilt:

$$K(S) \cong \mathbb{C}(x, y).$$

Definition: Eine Fläche S heißt *geometrische Regelfläche*, wenn es eine glatte Kurve C , sowie eine Abbildung $p : S \rightarrow C$ von maximalem Rang gibt (d.h. $dp(x)$ hat in jedem Punkt Rang 1), deren Fasern isomorph zu \mathbb{P}^1 sind.

Beispiel: Produkte $C \times \mathbb{P}^1$ sind in offensichtlicher Weise geometrische Regelflächen.

Theorem III.1.1 (Noether-Enriques) *Es sei S eine Fläche, $p : S \rightarrow C$ eine Abbildung auf eine glatte Kurve. Sei $Q \in C$ ein regulärer Wert von p , so daß die Faser über Q isomorph zu \mathbb{P}^1 ist. Dann gibt es eine offene Umgebung U von Q , und einen Isomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{P}^1$, so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & & U \end{array}$$

kommutiert.

Korollar III.1.2 *Eine geometrische Regelfläche ist eine Regelfläche.*

Bemerkung: Verwendet man die GAGA Sätze, d.h. die Aussage, daß es eine Bijektion gibt zwischen Isomorphieklassen von holomorphen und algebraischen Vektorbündeln, so kann man dies auch aus dem Satz von Grauert-Fischer schließen, der die analytische lokale Trivialität gibt.

Bemerkung: Diese Aussage läßt sich nicht auf höhere Dimensionen übertragen.

Wir bemerken noch

Lemma III.1.3 *Es sei D ein effektiver Divisor und C eine irreduzible Kurve mit $C^2 \geq 0$. Dann ist $D.C \geq 0$.*

Beweis. Wir können schreiben $D = D' + nC$, $n \geq 0$ so daß C in D' nicht mehr vorkommt. Dann gilt $D.C = D'.C + nC^2 \geq 0$. \square

Beweis von Theorem (III.1.1): Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Schritt: $H^2(\mathcal{O}_S) = 0$.

Es sei F die Faser von p über Q . Es gilt $F^2 = 0$. Serre-Dualität ergibt $h^2(\mathcal{O}_S) = h^0(K_S)$. Wäre $h^2(\mathcal{O}_S) \neq 0$, so wäre K_S effektiv. Nach obigem Lemma wäre dann $K_S.F \geq 0$. Andererseits besagt die Adjunktionsformel

$$(1) \quad -2 = 2p(F) - 2 = F.(F + K_S) = F.K_S$$

ein Widerspruch.

2. Schritt: Es gibt einen Divisor H auf S mit $H.F = 1$. Dies ist der essentielle Schritt. Wir betrachten hierzu die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0 S \rightarrow \text{Pic} S \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_S)$$

Da $H^2(\mathcal{O}_S) = 0$ ist, folgt, daß $H^2(S, \mathbb{Z}) = NS(S)$ gilt. Es genügt also, ein Element $h \in H^2(S, \mathbb{Z})$ zu finden mit $h.f = 1$ (wobei f die Klasse von F in $H^2(S, \mathbb{Z})$ bezeichnet). Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} H^2(S, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto af. \end{aligned}$$

Das Bild ist ein Ideal in \mathbb{Z} , und damit von der Form (d) , $d \in \mathbb{N}$. Wir wollen $d = 1$ zeigen. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} H^2(S, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto \frac{1}{d}(af). \end{aligned}$$

Wegen der Poincaré-Dualität ist die Abbildung

$$\begin{aligned} H^2(S, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \text{Hom}(H^2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ f' &\longmapsto (a \longmapsto af') \end{aligned}$$

surjektiv, und der Kern ist gerade die Torsion von $H^2(S, \mathbb{Z})$. Also gibt es ein Element $f' \in H^2(S, \mathbb{Z})$, so daß $f = df'$ modulo Torsion gilt in $H^2(S, \mathbb{Z})$. Andererseits sei K_S der kanonische Divisor auf S und k die zugehörige Klasse in $H^2(S, \mathbb{Z})$. Für jede irreduzible Kurve C gilt

$$2p(C) - 2 = (K + C).C$$

Daraus folgt, daß für die zugehörigen Kohomologieklassen gilt

$$(2) \quad c^2 + ck \equiv 0 \pmod{2}$$

Nun gilt für $a, b \in H^2(S, \mathbb{Z})$, daß

$$(a + b)^2 + (a + b)k = (a^2 + ak) + (b^2 + bk) + 2ab.$$

D.h.

$$(a + b)^2 + (a + b)k \equiv ((a^2 + ak) + (b^2 + bk)) \pmod{2}.$$

Damit gilt Formel (2) für alle Kohomologieklassen $c \in H^2(S, \mathbb{Z})$. Wegen $f^2 = 0$ und $f = df'$ modulo Torsion folgt auch $(f')^2 = 0$. Ebenso folgt aus (1), daß $f'.k = -\frac{2}{d}$. Dies zeigt bereits, daß $d = 1$ oder 2 . Da nun

$$(f')^2 + f'.k = -\frac{2}{d} \equiv 0 \pmod{2}$$

folgt $d = 1$.

3. Schritt: Wir betrachten den oben gefundenen Divisor H . Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(H + (r-1)F) \rightarrow \mathcal{O}_S(H + rF) \rightarrow \mathcal{O}_F(1) \rightarrow 0$$

führt zu der langen Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^0(\mathcal{O}_S(H + rF)) & \xrightarrow{a_r} & H^0(\mathcal{O}_F(1)) & \rightarrow & H^1(\mathcal{O}_S(H + (r-1)F)) \\ & & \xrightarrow{b_r} & & H^1(\mathcal{O}_F(1)) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Da $H^1(\mathcal{O}_F(1)) = 0$ ist müssen die b_r für $r \gg 0$ Isomorphismen sein. Dann ist a_r surjektiv. Es sei nun $V \subset H^0(\mathcal{O}_S(H + rF))$ ein 2-dimensionaler Unterraum mit $a_r(V) = H^0(\mathcal{O}_F(1))$. Es seien nun $x_1, \dots, x_k \in C$ so gewählt, daß alle Basiskomponenten von V in den Fasern F_{x_1}, \dots, F_{x_k} enthalten sind. Ferner seien $x_{k+1}, \dots, x_l \in C$ so, daß alle Basispunkte von V in $F_{x_{k+1}}, \dots, F_{x_l}$ liegen. Schließlich seien x_{l+1}, \dots, x_m diejenigen Punkte in C , so daß die Fasern $F_{x_{l+1}}, \dots, F_{x_m}$ reduzibel sind. Wir setzen $U = C \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Auf $p^{-1}(U)$ ist der Pencil V basispunktfrei. Wir erhalten eine Abbildung

$$\varphi_V : p^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Da V auf jeder Faser basispunktfrei von Grad 1 ist, ist $\varphi_V|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ stets ein Isomorphismus. Also ist

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi=(p, \varphi_r)} & U \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm und φ ist ein Isomorphismus. (Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\varphi^{-1}(u, t) = p^{-1}(u) \cap \varphi_V^{-1}(t)$. Dabei ist $C_t = \varphi_V^{-1}(t)$ ein Schnitt von $p^{-1}(U) \rightarrow U$). \square

Wir wollen im folgenden geometrische Regelflächen genauer untersuchen. Bekanntlich gibt es eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow 1.$$

Wir betrachten nun Garben $\mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$, bzw. $\mathcal{PGL}(n, \mathbb{C})$, die definiert sind durch

$$\Gamma(U, \mathcal{GL}(n, \mathbb{C})) = \{f; f : U \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ ist ein Morphismus}\}$$

bzw.

$$\Gamma(U, \mathcal{PGL}(n, \mathbb{C})) = \{f; f : U \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C}) \text{ ist ein Morphismus}\}.$$

Dies liefert eine exakte Sequenz

$$(3) \quad 1 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{PGL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow 1.$$

Ist \mathcal{E} ein Vektorbündel von Rang n auf X , so gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X , sowie Isomorphismen

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^n$$

wobei $\pi : \mathcal{E} \rightarrow X$ die Bündelabbildung ist. Sind $i, j \in I$, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \\ & \swarrow \varphi_i & \searrow \varphi_j \\ & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \end{array}$$

Dies liefert Schnitte

$$f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{GL}(n, \mathbb{C}))$$

mit $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$. Dies ergibt eine 1-Cozykel, und damit eine Klasse

$$(f_{ij}) \in H^1(X, \mathcal{GL}(n, \mathbb{C})).$$

Damit ergibt sich eine Bijektion

$$H^1(X, \mathcal{GL}(n, \mathbb{C})) = \{ \text{Rang } n \text{ Vektorbündel auf } X \}.$$

Im Spezialfall $n = 1$ führt dies auf die uns schon bekannte Identifikation:

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic } X.$$

Für lokal-freie \mathbb{P}^n -Bündel erhält man analog

$$H^1(X, \mathcal{PGL}(n, \mathbb{C})) = \{ \text{Lokal freie } \mathbb{P}^n - \text{Bündel auf } X \}.$$

Ist \mathcal{E} ein Vektorbündel, so kann man diesem ein \mathbb{P}^{n-1} -Bündel $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ zuordnen, indem man faserweise $\mathbb{P}(\mathcal{E})_x = \mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$ setzt.

Satz III.1.4 *Es sei C eine glatte Kurve.*

- (i) *Jede geometrische Regelfläche S über C ist von der Form $S = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ für ein Rang 2 Bündel \mathcal{E} auf C .*
- (ii) *Es gibt genau dann einen Isomorphismus von \mathbb{P}^1 -Bündeln $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$, wenn $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \otimes \mathcal{L}$ für ein Geradenbündel $\mathcal{L} \in \text{Pic } C$.*

Beweis. Wir beweisen dies in der analytischen Kategorie. Dies ist wegen der GAGA-Sätze ausreichend. Wir betrachten hierzu die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_C^* \longrightarrow \mathcal{GL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{PGL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow 1.$$

Obwohl $\mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$, bzw. $\mathcal{PGL}(n, \mathbb{C})$ für $n \geq 2$ keine abelschen Gruppen sind, so erhalten wir doch eine lange Kohomologiesequenz von Mengen

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{GL}(2, \mathbb{C})) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{PGL}(2, \mathbb{C})) \\ &\longrightarrow H^2(C, \mathcal{O}_C^*) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Ist S eine geometrische Regelfläche über C , so definiert dies nach Korollar (III.1.2) (bzw. dem Satz von Grauert-Fischer) ein lokal-freies \mathbb{P}^1 -Bündel, also ein Element in $H^1(C, \mathcal{PGL}(2, \mathbb{C}))$. Unsere Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, daß $H^2(C, \mathcal{O}_C^*) = 0$. Hierzu betrachten wir die lange exakte Kohomologiesequenz, die sich aus der Exponentialsequenz ergibt:

$$\dots \longrightarrow H^2(C, \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^2(C, \mathcal{O}_C^*) \longrightarrow H^3(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots$$

Da $H^2(C, \mathcal{O}_C) = H^3(C, \mathbb{Z}) = 0$ ist, folgt die Aussage. \square

Wir wollen nun die minimalen Modelle von Regelflächen untersuchen.

Satz III.1.5 *Es sei S eine Fläche, auf der keine (-1) -Kurven existieren. Es sei S eine glatte Kurve und $f : S \longrightarrow C$ ein Morphismus, dessen allgemeine Faser ein \mathbb{P}^1 ist. Dann ist $f : S \longrightarrow C$ eine geometrische Regelfläche.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß alle Fasern glatt und isomorph zu \mathbb{P}^1 sind. Dann folgt die Aussage aus Theorem (III.1.1). Da die allgemeine Faser ein \mathbb{P}^1 ist, folgt aus der Adjunktionsformel, daß $K.F = -2$ ist. Damit kann es auch keine mehrfachen Fasern geben. Also haben alle irreduziblen Fasern das Geschlecht $p(F) = 0$ und sind damit glatt und rational. Es ist also auszuschließen, daß es reduzible Fasern gibt. Zunächst folgt aus topologischen Gründen aus der Tatsache, daß die allgemeine Faser zusammenhängend ist, auch, daß alle Fasern zusammenhängend sind. Es sei $F = \sum n_i C_i$ nun eine reduzible Faser. Es gilt

$$n_i C_i^2 = (C_i \cdot (F - \sum_{j \neq i} n_j C_j)).$$

Da F zusammenhängend ist, gibt es ein $j \neq i$ mit $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Also ist

$$n_i C_i^2 = (C_i \cdot (F - \sum_{j \neq i} n_j C_j)) = - \sum_{j \neq i} n_j (C_i \cdot C_j) < 0$$

und damit $C_i^2 < 0$. Die Adjunktionsformel gibt

$$2p(C_i) - 2 = (K + C_i \cdot C_i) = K \cdot C_i + C_i^2.$$

Ist $C_i^2 < 0$, so ist entweder $C_i^2 = -1$, $K \cdot C_i = -1$ und C_i glatt rational, was nach Voraussetzung ausgeschlossen wurde, oder $K \cdot C_i \geq 0$. Aber dann folgt $K.F \geq 0$ im Widerspruch zu $K.F = -2$. \square

Korollar III.1.6 *Ist S eine minimale Regelfläche, die nicht rational ist, so ist S eine geometrische Regelfläche.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist S birational äquivalent zu $C \times \mathbb{P}^1$. Die Projektion auf C liefert eine rationale Abbildung $S \dashrightarrow C$. Dies ist bereits ein Morphismus. Ansonsten betrachten wir eine Unbestimmtheitsstelle $P \in S$ und erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \\ S & \dashrightarrow & C \end{array}$$

Der exzeptionelle Divisor E in \tilde{S} kann nicht auf C abgebildet werden, da C nicht rational ist. Damit geht E auf einen Punkt in C und nach der Bemerkung nach Satz (II.2.4) ist P keine Unbestimmtheitsstelle der Abbildung $S \dashrightarrow C$, ein Widerspruch.

Die allgemeine Faser der Projektion $S \rightarrow C$ ist ein \mathbb{P}^1 , damit folgt die Behauptung aus Satz (III.1.5). \square

Will man nun geometrische Regelflächen studieren, so heißt dies, daß man Flächen der Form $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ studiert, wobei \mathcal{E} ein Rang-2 Bündel auf C ist. Das heißt, die Klassifikation der geometrischen Regelflächen stimmt mit der Klassifikation der Rang-2 Bündel auf glatten Kurven, modulo tensorieren mit Geradenbündeln, überein.

Satz III.1.7 Jedes Rang r Bündel \mathcal{E} auf \mathbb{P}^1 spaltet, d.h. es gibt Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i)$, $i = 1, \dots, r$ mit

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_r)$$

Beweis. Für ein Rang r Bündel auf \mathbb{P}^1 lautet der Satz von Riemann-Roch bekanntlich

$$\chi(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}) - h^1(\mathcal{E}) = \deg \mathcal{E} + r(1 - g).$$

Also ist $h^0(\mathcal{E}(n)) \neq 0$ für $n \gg 0$. Andererseits ist nach Serre

$$h^0(\mathcal{E}(-n)) = h^1(\mathcal{E}^\vee(n-2)) = 0 \quad \text{für } n \gg 0.$$

Wir können daher n_0 so wählen, daß $h^0(\mathcal{E}(n_0)) \neq 0$, aber $h^0(\mathcal{E}(n_0 - 1)) = 0$. Ein Schnitt

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{E}(n_0)$$

hat keine Nullstellen, da sonst $h^0(\mathcal{E}(n_0 - k)) \neq 0$ für $k \geq 1$. Dies liefert eine exakte Sequenz

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}(n_0) \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \rightarrow 0$$

wobei \mathcal{F} ein Vektorbündel vom Rang $r - 1$ ist.

Behauptung: $h^1(\mathcal{F}^\vee) = 0$.

Twisted man Sequenz (4) mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, so erhält man

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \rightarrow \mathcal{E}(n_0 - 1) \rightarrow \mathcal{F}(-1) \rightarrow 0.$$

Da $h^0(\mathcal{E}(n_0 - 1)) = 0$ und $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$, folgt $h^0(\mathcal{F}(-1)) = 0$ und damit auch $h^0(\mathcal{F}(-2)) = 0$. Mittels Serre-Dualität ergibt dies $h^1(\mathcal{F}^\vee) = 0$.

Tensoriert man (4) mit \mathcal{F}^\vee , so erhält man

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{E}(n_0) \rightarrow \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{F} \rightarrow 0$$

bzw.

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}(n_0)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Da $h^1(\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{F}, \mathcal{O})) = h^1(\mathcal{F}^\vee) = 0$, gibt es ein Element

$$\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}(n_0))$$

das auf die Identität in $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ abgebildet wird. Wir haben also

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}(n_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} \mathcal{F} \rightarrow 0$$

mit $\beta \circ \gamma = id_{\mathcal{F}}$. Also ist

$$(\alpha, \gamma) : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(n_0)$$

ein Isomorphismus. Nach Induktionsvoraussetzung ist \mathcal{F} eine direkte Summe von Geradenbündeln und damit auch $\mathcal{E}(n_0)$, beziehungsweise \mathcal{E} . \square

Bemerkung: Ist C eine elliptische Kurve, so gibt es darauf nicht zerfallende Rang 2 Bündel. Modulo Tensorieren mit Geradenbündeln sind diese von der Form

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

oder

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{O}_C(P_0) \rightarrow 0 \quad (P_0 \in C).$$

Dabei hängt \mathcal{E}_2 (modulo tensorieren mit Geradenbündeln) nicht von P_0 ab. Es gibt also über elliptischen Kurven genau zwei geometrische Regelflächen, die nicht von der Form $\mathbb{P}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)$ mit $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \text{Pic } C$ sind.

Wir kehren nun kurz zu den geometrischen Regelflächen über \mathbb{P}^1 zurück. Nach Satz (III.1.7) sind diese von der Form

$$F_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)), \quad n \geq 0.$$

Definition: Die Flächen F_n heißen *Hirzebruchflächen*.

Damit kann man Satz(III.1.7) auch so formulieren:

Korollar III.1.8 *Jede geometrische Regelfläche über \mathbb{P}^1 ist eine Hirzebruchfläche.*

Wir kehren nun nochmals zu allgemeinen geometrischen Regelflächen $S = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow C$ zurück. Wir wissen aus dem Beweis von Theorem(III.1.1), daß es einen Divisor H gibt, mit $H.F = 1$. Wir bezeichnen die entsprechenden Klassen in $H^2(S, \mathbb{Z})$ mit h , bzw f .

Satz III.1.9 *Für die geometrische Regelfläche $p : S \rightarrow C$ gilt:*

- (i) $\text{Pic } S = p^* \text{Pic } C \oplus \mathbb{Z}H$
- (ii) $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}f \oplus \mathbb{Z}h$
- (iii) *Ist $d = h^2$ und g das Geschlecht von C , so gilt: $c_1(K_S) = -2h + (2g - 2 + d)f$ und $K_S^2 = 8(1 - g)$.*

Beweis. Es sei D ein Divisor. Ist $m = -D.F$ so gilt $(D + mH).F = 0$. Es genügt also folgendes zu zeigen: Ist D ein Divisor auf S mit $D.F = 0$, so ist D Pullback eines Divisors auf C . Wir setzen $D_n := D + nF$. Dann ist auch $D_n.F = 0$. Ferner gilt

$$D_n^2 = D^2, \quad D_n.K = D.K - 2n.$$

Da $(K - D_n).F = K.F = -2$, folgt $h^0(K - D_n) = h^2(D_n) = 0$. Damit ergibt Riemann-Roch für D_n

$$h^0(D_n) - h^1(D_n) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D_n^2 - D_n.K) > 0$$

für $n \gg 0$. Wir können also annehmen, daß D_n effektiv ist. Da $D_n.F = 0$, ist D_n eine Summe von Fasern, also ist D_n ein Element von $p^* \text{Div } C$, und damit auch D .

(ii) Die Exponentialsequenz gibt

$$\dots \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Pic } S \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

Da $h^2(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, K_S) = 0$ wegen $K_S.F = -2$, folgt, daß $NS(S) = H^2(S, \mathbb{Z})$. Insbesondere ist $H^2(S, \mathbb{Z})$ durch h und f erzeugt. Da $h.f = 1$, sind diese beiden Elemente unabhängig.

(iii) Es gilt $c_1(K_S) = ah + bf$ in $H^2(S, \mathbb{Z})$. Da $K_S.F = -2$ folgt $a = -2$. Wir betrachten nun $H_n = H + nF$. Es gilt

$$H_n^2 = d + 2n, \quad H_n.K = H.K - 2n, \quad (K - H_n).F = -3.$$

Dann schließt man mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch, daß H_n effektiv ist für $n \gg 0$. Da $H_n.F = 1$ ist, enthält H_n einen Schnitt, d.h. eine Kurve $C' \subset S$, so daß $p|_{C'} : C' \rightarrow C$ ein Isomorphismus ist. Die Adjunktionsformel für C' ergibt

$$2g - 2 = (K_S + C').C' = (-2h + bf + h + nf)(h + nf)$$

also

$$2g - 2 = -d - n + b + n$$

d.h.

$$b = 2g - 2 + d.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} K_S^2 &= (-2h + (2g - 2 + d)f)^2 \\ &= 4d - 4(2g - 2 + d) \\ &= 8(1 - g). \end{aligned}$$

□

Wir hatten bereits folgende Invarianten eingeführt:

$$\begin{aligned} q &= h^1(\mathcal{O}_S) = h^0(\Omega_S^1) \quad (\text{Irregularität}) \\ p_g &= h^0(K_S) \quad (\text{Geometrisches Geschlecht}) \\ P_n &= h^0(nK_S), n \geq 2 \quad (n\text{-tes Plurigeschlecht}) \end{aligned}$$

Satz III.1.10 q, p_g und P_n sind birationale Invarianten.

Beweis. Wir führen den Beweis für

$$p_g = h^0(K_S) = h^0(\Lambda^2 \Omega_S^1).$$

Für die anderen Invarianten kann man analog argumentieren. Es sei $f : S \dashrightarrow S'$ eine birationale Abbildung. Es sei $F \subset S$ die minimale endliche Menge, so daß f auf $S \setminus F$ definiert ist. Man hat eine Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : H^0(S', \Lambda^2 \Omega_{S'}^1) &\longrightarrow H^0(S \setminus F, \Lambda^2 \Omega_{S \setminus F}^1) \\ \omega &\longmapsto f^* \omega. \end{aligned}$$

In einer Umgebung U eines Punktes $P \in F$ ist

$$f^* \omega = g dz_1 \wedge dz_2$$

wobei g regulär auf $U \setminus P$ ist, und damit auf ganz U . Also erhalten wir einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} f^* : H^0(S', \Lambda^2 \Omega_{S'}^1) &\longrightarrow H^0(S, \Lambda^2 \Omega_S^1) \\ \omega &\longmapsto f^* \omega. \end{aligned}$$

Da $(f^{-1})^*$ eine Umkehrabbildung ist, ist f^* ein Isomorphismus. \square

Satz III.1.11 *S sei birational äquivalent zu $C \times \mathbb{P}^1$. Dann ist $p_g = P_n(S) = 0$ und $q(S) = g(C)$.*

Beweis. Es genügt, die Invarianten von $C \times \mathbb{P}^1$ zu berechnen. Es seien p , bzw. q die Projektionen auf C , bzw. \mathbb{P}^1 . Dann gilt

$$(5) \quad \Omega_S^1 = p^* \Omega_C^1 \oplus q^* \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 = p^* K_C \oplus q^* K_{\mathbb{P}^1}.$$

Also

$$H^0(S, \Omega_S^1) = H^0(C, K_C) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, K_{\mathbb{P}^1})$$

und damit

$$q = h^0(S, \Omega_S^1) = h^0(K_C) = g(C).$$

Aus (5) folgt auch

$$K_S = \Lambda^2 \Omega_S^1 = p^* K_C \otimes q^* K_{\mathbb{P}^1}.$$

Nun ist $K_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Also ist

$$K_{S \cdot F_p} = -2$$

für alle Fasern der Abbildung p . Es folgt, daß nK_S für $n \geq 1$ nicht effektiv sein kann. \square

Wir betrachten nun wieder die Hirzebruch-Flächen

$$F_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)).$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} s_0 : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow F_n \\ x &\longmapsto (0 : 1) \in (F_n)_x \end{aligned}$$

definiert einen Schnitt $C_0 \subset F_n$. Es gilt dann

$$\text{Pic } F_n = \mathbb{Z}C_0 + \mathbb{Z}F.$$

Ferner können wir zu jedem Polynom $P_n \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ einen Schnitt C_{P_n} definieren durch die Abbildung

$$\begin{aligned} s_{P_n} : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow F_n \\ x &\longmapsto (1 : P_n(x)) \in (F_n)_x. \end{aligned}$$

Es gilt

$$C_{P_n} \cdot F = 1, \quad C_{P_n} \cdot C_0 = 0.$$

Insbesondere folgt daraus auch, daß C_{P_n} und C_{Q_n} für je zwei Polynome P_n und Q_n numerisch, und damit auch linear äquivalent sind.

Satz III.1.12

- (i) *Es gilt $C_0^2 = -n$. Auf F_n gibt es außer C_0 keine weiteren irreduziblen Kurven mit negativem Selbstschnitt.*
- (ii) *Ist $n \neq 1$, ist F_n minimal.*
- (iii) *Die Flächen F_n sind paarweise nicht isomorph.*
- (iv) *Die Flächen $F_n, n \neq 1$ sind genau die minimalen geometrischen Regelflächen mit $q = 0$.*

Beweis. Die Aussagen (ii) - (iv) folgen unmittelbar aus (i). Um (i) zu zeigen, schreiben wir

$$C_{P_n} = C_0 + aF.$$

Nun ist $C_{P_n}^2 = (C_{P_n} \cdot C_{Q_n}) = n$, also

$$n = C_{P_n}^2 = C_0 C_{P_n} + aF \cdot C_{P_n} = a$$

d.h. $C_0 = C_{P_n} - nF$ und damit

$$C_0^2 = C_{P_n}^2 - 2nC_{P_n} \cdot F = -n.$$

Wir müssen noch zeigen, daß es keine weiteren irreduziblen Kurven mit negativem Selbstschnitt gibt. Es sei $D \neq C_0$ eine irreduzible Kurve. Wir haben eine Darstellung

$$D = aC_0 + bF, \quad a > 0.$$

Es ist

$$0 \leq D \cdot C_0 = -an + b.$$

also $b \geq an$. Damit gilt

$$D^2 = -a^2n + 2ab \geq a^2n \geq 0.$$

□

Wir hatten gesehen, daß die Klassifikation von geometrischen Regelflächen über einer Kurve C der Klassifikation von Rang 2 Bündeln auf C , modulo tensorieren mit Geradenbündeln, entspricht. Bei Kurven von höherem Geschlecht sind dies *Familien* von Vektorbündeln. Bei elliptischen Kurven hat man folgende Fälle

- (i) Direkte Summen: $\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}, \mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$

(ii) Nicht-spaltende Erweiterungen von Grad 0:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

(iii) Nicht-spaltende Erweiterungen von Grad 1:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{O}_C(P_0) \rightarrow 0$$

wobei P_0 ein Punkt von C ist. Das \mathbb{P}^1 -Bündel $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ hängt nicht vom Punkt P_0 ab.

IV Weitere Hilfsmittel

4.1 Normalisierung

Es sei X eine algebraische Menge.

Definition:

- (i) Ein Punkt $x \in X$ heißt *normaler Punkt*, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ normal ist, d.h. falls $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Integritätsring ist, der in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.
- (ii) X heißt *normal*, falls für alle Punkte $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ normal ist.

Bemerkungen:

- (i) Jeder reguläre Punkt ist normal.
- (ii) Ist X eine normale Varietät, so gilt $\text{codim}_X \text{Sing}(X) \geq 2$. Insbesondere ist eine Kurve genau dann normal, wenn sie glatt ist.
- (iii) Eine irreduzible affine Varietät $X \subset \mathbb{C}^n$ ist genau dann normal, wenn der Koordinatenring $A(X)$ normal ist.
- (iv) Wir betrachten die Kurve

$$C = \{x^2 - y^3 = 0\}$$

Im Nullpunkt ist C nicht normal. Die Funktion $h = x/y$ ist nicht regulär in 0. Es gilt jedoch

$$h^2 - y = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - y = \frac{x^2 - y^3}{y^2} = 0.$$

- (v) Es sei $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_i = \{f_i = 0\}$ und $x \in X_1 \cap X_2$. Dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ nicht nullteilerfrei, also ist x nicht normal.

Definition: Eine *Normalisierung* einer Varietät X ist ein Paar (X', ν) wobei X' eine normale Varietät und $\nu : X' \rightarrow X$ eine endliche, birationale Abbildung ist.

Satz IV.1.1 *Ist X eine affine (projektive) Varietät, so gibt es stets eine Normalisierung (X', ν) . Dabei ist X' wieder eine affine (projektive) Varietät. Ist (X'', ν') eine weitere Normalisierung, dann gibt es einen Isomorphismus $f : X' \rightarrow X''$ mit $\nu' = \nu'' \circ f$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, daß X eine affine Varietät ist. Wir können uns darauf beschränken, daß X irreduzibel ist. Ansonsten zerlegen wir X in seine irreduziblen Komponenten X_1, \dots, X_k . Ist (X'_i, ν_i) eine Normalisierung für $i = 1, \dots, k$, so definieren wir X' als die disjunkte Vereinigung der X'_i . Zusammen mit der offensichtlichen Abbildung nach X erhalten wir eine Normalisierung von X . Außerdem sehen wir mit Punkt (v) der obigen Bemerkung, daß die Normalisierung einer Varietät genau dieselbe Anzahl von Komponenten besitzt wie X selbst und die disjunkte Vereinigung der Normalisierungen der Komponenten ist. Es sei $A(X)$ der Koordinatenring von X . Es sei $\bar{A}(X)$ der ganze

Abschluß von $A(X)$ in dem Funktionenkörper $K(X)$ von X . Da $A(X)$ eine endlich erzeugte reduzierte k -Algebra ist, ist $\overline{A}(X)$ endlich erzeugter $A(X)$ -Modul und eine endlich erzeugte reduzierte k -Algebra. Es sei $X' = \text{Spec } \overline{A}(X)$. Die Inklusion $A(X) \hookrightarrow \overline{A}(X)$ induziert eine endliche Abbildung $\nu : X' \rightarrow X$. Da $\overline{A}(X)$ normal ist, ist X' eine normale Varietät. Die Abbildung ν ist birational, da sowohl $A(X)$ als auch $\overline{A}(X)$ denselben Quotientenkörper $K(X)$ besitzen. Ist $\nu' : X'' \rightarrow X$ eine weitere Normalisierung, so ist X'' , da ν' eine endliche Abbildung ist wieder eine affine Varietät. Der Koordinatenring $A(X'')$ ist in $K(X'') = K(X)$ enthalten und ganz algebraisch über $A(X)$. Also folgt $A(X') \cong A(X'')$ und dieser Isomorphismus induziert den gesuchten Isomorphismus $f : X' \rightarrow X''$.

Es sei nun $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät mit homogenem Koordinatenring $S(X)$ und Funktionenkörper $K(X)$. Der ganze Abschluß $\overline{S}(X)$ von $S(X)$ in $K(X)$ ist ein graduerter Ring, und wir können $X' = \text{Proj } \overline{S}(X)$ wählen. Es bleibt zu zeigen, daß X' normal und die natürliche Abbildung $\nu : X' \rightarrow X$ endlich ist. Sei dazu $U_i = \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ bzw. $X_i = X \cap U_i$. Dann ist X_i affin mit Koordinatenring $A(X_i) = S(X)_{x_i}$. Da lokalisieren und normalisieren vertauschbar sind, gilt $\overline{S}(X)_{x_i} = \overline{S(X)_{x_i}}$. Insbesondere ist $X'_i = \nu^{-1}(X_i)$ normal und $\nu|_{X'_i} : X'_i \rightarrow X_i$ ist eine Normalisierung. Die Eindeutigkeit folgt ähnlich wie oben. \square

Bemerkung: Die Normalisierung ist allgemeiner für quasi-projektive Varietäten erklärt.

Satz IV.1.2 *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus projektiver Varietäten. Dann gilt*

- (i) *Ist die natürliche Abbildung $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus, so ist f surjektiv, und alle Fasern sind zusammenhängend.*
- (ii) *Ist umgekehrt Y normal, f surjektiv und sind alle Fasern zusammenhängend, so ist die natürliche Abbildung $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Dies ist eine einfache Folgerung aus dem Theorem über formale Funktionen (vgl. [3, Theorem III.11.1 und Corollary III.11.3]). \square

Korollar IV.1.3 *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung zwischen projektiven Varietäten. Die Varietät Y sei normal, und die Fasern von f seien zusammenhängend. Dann ist für jedes Geradenbündel \mathcal{L} auf Y die natürliche Abbildung*

$$f^* : \Gamma(Y, \mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(X, f^*\mathcal{L})$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Offensichtlich ist f^* injektiv. Es gilt

$$f_*f^*\mathcal{L} = \mathcal{L} \otimes f_*\mathcal{O}_X$$

(dies ist ein einfacher Fall der Projektionsformel). Nach Satz (IV.1.2) gilt in diesem Fall $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Also erhält man

$$f_*f^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$$

und somit

$$\Gamma(X, f^*\mathcal{L}) = \Gamma(Y, f_*f^*\mathcal{L}) \cong \Gamma(Y, \mathcal{L}).$$

\square

Korollar IV.1.4 (Zariski's Main Theorem) Sei Y eine normale irreduzible projektive Varietät und sei $f : X \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus. Dann hat f zusammenhängende Fasern.

Beweis. Nach Satz (IV.1.2) ist $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ zu zeigen. Dies ist eine lokale Aussage. Wir können daher annehmen, daß Y affin ist. Es sei $A = A(Y) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ der Koordinatenring. Da f ein Morphismus zwischen projektiven Varietäten ist, ist $B = \Gamma(Y, f_*\mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ein endlich erzeugter A -Modul. Sowohl A als auch B sind Integritätsringe mit Quotientenkörper $K(X) = K(Y)$. Da A ganz abgeschlossen ist, folgt $A = B$. Damit gilt $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. \square

Diese Aussage kann man auf rationale Abbildungen anwenden. Es sei $f : X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung mit maximalem Definitionsbereich $X \setminus F$. Der Graph von f ist

$$\Gamma_f := \overline{\{(x, f(x)); x \in X \setminus F\}} \subset X \times Y.$$

Es sei $p : \Gamma_f \rightarrow X$ die Projektion auf X , sowie $q : \Gamma_f \rightarrow Y$ die Projektion auf Y .

Korollar IV.1.5 Es sei $f : X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung zwischen irreduziblen projektiven Varietäten. Ist X normal, so ist für jedes $x \in X$ die Menge $f(x) := q(p^{-1}(x))$ zusammenhängend.

Beweis. $p : \Gamma_f \rightarrow X$ ist surjektiv und birational. Da X normal ist, ist $p^{-1}(x)$ zusammenhängend, und damit auch $q(p^{-1}(x))$. \square

Korollar IV.1.6 Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler projektiver Varietäten. Es seien $\nu : X' \rightarrow X$, bzw. $\mu : Y' \rightarrow Y$ die Normalisierungen von X , bzw. Y . Dann gibt es einen Morphismus $f' : X' \rightarrow Y'$, so daß $\mu \circ f' = f \circ \nu$ gilt.

Beweis. Da ν und μ birational sind und f dominant ist, können wir eine rationale Abbildung $f' = \mu^{-1} \circ f \circ \nu$ definieren. Es genügt zu zeigen, daß $f'(x)$ aus einem Punkt besteht. Nun ist nach obigem Korollar $f'(x)$ zusammenhängend. Andererseits ist $f'(x) \subset \mu^{-1}(f(\nu(x)))$. Da μ endlich ist, ist dies eine endliche Menge. Also ist $f'(x)$ ein Punkt. \square

Theorem IV.1.7 (Steinfaktorisierung) Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein surjektiver Morphismus projektiver Varietäten. Dann gibt es eine Varietät Y' , einen endlichen Morphismus $g : Y' \rightarrow Y$ und einen Morphismus $f' : X \rightarrow Y'$ mit zusammenhängenden Fasern, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f' \downarrow & \searrow f & \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

kommutiert. Ist X normal, dann auch Y' .

Beweis. Wir setzen

$$Y' = \text{Spec } f_*\mathcal{O}_X.$$

(Dies soll folgendes bedeuten: Für jede affine offene Menge $V \subset Y$ betrachten wir $Y'_V = \text{Spec } (\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_{f^{-1}(V)})$). Die Y'_V verkleben sich zu Y'). Die natürliche Abbildung

$\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ induziert einen Morphismus $g : Y' \rightarrow Y$. Da f ein Morphismus zwischen projektiven Varietäten ist, ist $f_*\mathcal{O}_X$ ein kohärenter \mathcal{O}_Y -Modul. Deswegen ist $g : Y' \rightarrow Y$ endlich. Nun ist $\mathcal{O}_{Y'} = f_*\mathcal{O}_X$, d.h. wir haben eine natürliche Abbildung $\mathcal{O}_{Y'} = f_*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$. Dies induziert einen Morphismus $f' : X \rightarrow Y'$ mit $f'_*\mathcal{O}_X = f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Also hat f' nach Satz (IV.1.2) zusammenhängende Fasern. Die Morphismen f und f' , und damit auch g sind surjektiv.

Ist X normal, so ist $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_{f^{-1}(V)})$ ein normaler Ring. Damit ist auch $\mathcal{O}_{Y', f'(x)}$ normal und Y' ist eine normale Varietät. \square

Korollar IV.1.8 *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus irreduzibler projektiver Varietäten, Y sei normal und eine Faser von f sei glatt und zusammenhängend. Dann ist jede Faser von f zusammenhängend.*

Beweis. Wir betrachten die Steinfaktorisierung

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f' \downarrow & \searrow f & \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Die Abbildung g hat Grad 1, ist also birational. Nach Korollar (IV.1.4) bestehen alle Fasern von g aus einem Punkt. Da f' zusammenhängende Fasern hat, gilt dasselbe für f . \square

4.2 Der Albanese Torus

Es sei zunächst V ein g -dimensionaler komplexer Vektorraum und Γ ein Gitter in V . Dann ist

$$T = V/\Gamma$$

ein kompakter g -dimensionaler Torus.

Jedes Element $\gamma \in \Gamma$ definiert eine geschlossene Kurve in T durch

$$\begin{array}{ccc} \bar{\gamma} : [0, 1] & \longrightarrow & T \\ t & \longmapsto & \overline{t\gamma}. \end{array}$$

Dies liefert einen Isomorphismus

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} t : \Gamma & \xrightarrow{\sim} & H_1(T, \mathbb{Z}) \\ \gamma & \longmapsto & [\bar{\gamma}]. \end{array}$$

Außerdem haben wir einen Isomorphismus

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \tau : V^\vee & \xrightarrow{\sim} & H^0(T, \Omega_T^1) \\ f & \longmapsto & df. \end{array}$$

Es gilt

$$(3) \quad \int_{t(\gamma)} \tau(f) = f(\gamma).$$

Es sei nun X eine komplexe, projektive Mannigfaltigkeit. Es sei

$$b_1(X) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(X, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C})$$

die erste Bettzahl. Hodge Theorie liefert eine Zerlegung

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathbb{C}) &= H^0(\Omega_X^1) \oplus H^1(\mathcal{O}_X) \\ &= H^0(\Omega_X^1) \oplus \overline{H^0(\Omega_X^1)}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt, daß $b_1 = 2g$ mit $g = h^0(\Omega_X^1)$ ist.

Es sei nun $\omega_1, \dots, \omega_g$ eine Basis von $H^0(\Omega_X^1)$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ eine Basis von $H_1(X, \mathbb{Z})$ modulo Torsion.

Die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \dots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g & \dots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{pmatrix} \in M(g \times 2g, \mathbb{C})$$

heißt die *Periodenmatrix* von X .

Lemma IV.2.1 *Die Spalten der Periodenmatrix sind linear unabhängig, definieren also ein Gitter in \mathbb{C}^g .*

Beweis. Angenommen, es gebe eine lineare Relation mit reellen Koeffizienten $a_i; i = 1, \dots, 2g$. Dann gilt

$$\sum_{\gamma_i} a_i \int \omega = 0 \quad (\text{für alle } \omega \in H^0(\Omega_X^1))$$

und damit auch

$$\sum_{\gamma_i} a_i \int \bar{\omega} = 0.$$

D.h. die lineare Abbildung

$$\sum_{\gamma_i} a_i \int : H^1(X, \mathbb{C}) = H^0(\Omega_X^1) \oplus \overline{H^0(\Omega_X^1)} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist identisch 0. Da die Paarung zwischen $H^1(X, \mathbb{C})$ und $H_1(X, \mathbb{C})$ nicht ausgeartet ist, ist $\sum a_i \gamma_i = 0$ in $H_1(X, \mathbb{C})$ also $a_i = 0$, für $i = 1, \dots, 2g$. \square

Ist Γ das durch die Periodenmatrix Ω gegebene Gitter, so kann man eine Torus

$$\text{Alb}(X) = \mathbb{C}^g / \Gamma$$

definieren. Intrinsisch ist

$$\text{Alb}(X) = H^0(\Omega_X^1)^\vee / \text{im } H_1(X, \mathbb{Z})$$

wobei

$$\begin{aligned} H_1(X, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^\vee \\ \gamma &\longmapsto \int_{\gamma} \end{aligned}$$

Definition: $\text{Alb}(X)$ heißt der *Albanese Torus* von X .

Es sei nun $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt. Dann können wir die Abbildung

$$\alpha : X \longrightarrow \text{Alb}(X)$$

$$x \longmapsto \left(\omega \mapsto \int_{x_0}^x \omega \right)$$

betrachten. Nach Konstruktion des Albanese Torus ist α wohldefiniert. Die Abbildung α ist holomorph. Da dies ein lokales Problem ist, genügt es offene Mengen $U \subset X$ zu betrachten, so daß U isomorph zum Einheitsball in \mathbb{C}^n ist. Dann ist $\alpha = q \circ a$ wobei $q : H^0(\Omega_X^1)^\vee \rightarrow \text{Alb}(X)$ die kanonische Projektion und

$$a : U \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^\vee$$

$$x \longmapsto \left(\omega \mapsto \int_{x_0}^x \omega \right)$$

ist. Die Abbildung a ist holomorph, da das Integral holomorph von der oberen Integralgrenze abhängt.

Die Abbildung α induziert einen Homomorphismus

$$\alpha^* : H^0(\Omega_{\text{Alb}(X)}^1) \rightarrow H^0(\Omega_X^1).$$

Andererseits haben wir einen Isomorphismus

$$\tau : H^0(\Omega_X^1) \rightarrow H^0(\Omega_{\text{Alb}(X)}^1).$$

Lemma IV.2.2 $\alpha^* = \tau^{-1}$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $\alpha^*(\tau(\omega)) = \omega$ für alle $\omega \in H^0(\Omega_X^1)$. Wir rechnen nun lokal, wobei die Bezeichnungen wie oben seien. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$\begin{aligned} (\alpha^* \circ \tau)(\omega)(x) &= (a^* \circ q^*)(\tau(\omega))(x) \\ &= a^* d(\langle \omega, - \rangle)(x) \\ &= d(\langle \omega, a(x) \rangle) \quad (\text{Definition von } a) \\ &= d \left(\int_{x_0}^x \omega \right) \\ &= \omega(x) \end{aligned}$$

Hierbei ist \langle, \rangle die Paarung zwischen $H^0(\Omega_X^1)$ und dessen Dualraum. □

Im folgenden soll die universelle Eigenschaft des Albanese Torus gezeigt werden.

Satz IV.2.3 *Es sei X eine projektive Mannigfaltigkeit und $f : X \rightarrow T$ eine holomorphe Abbildung in einen Torus T . Dann gibt es genau eine Abbildung $\tilde{f} : \text{Alb}(X) \rightarrow T$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow \alpha & \nearrow \tilde{f} \\ & \text{Alb}(X) & \end{array}$$

Bevor wir den Satz beweisen können, benötigen wir noch ein Lemma über Abbildungen zwischen komplexen Tori. Es seien dazu $T = V/\Gamma$ bzw. $T' = V'/\Gamma'$ Tori. Ein Vektorraumhomomorphismus $H : V \rightarrow V'$ mit $H(\Gamma) \subset \Gamma'$ induziert eine Abbildung $h : T \rightarrow T'$. In gewissem Sinne gilt auch die Umkehrung

Lemma IV.2.4 *Ist $h : T \rightarrow T'$ eine holomorphe Abbildung, so gibt es eine Translation t auf V' und eine lineare Abbildung $H : V \rightarrow V'$ mit $H(\Gamma) \subset \Gamma'$, so daß h durch $t \circ H$ induziert wird. Ferner gilt, daß das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} (V')^\vee & \xrightarrow{{}^t H} & V^\vee \\ \downarrow \tau_{T'} & & \downarrow \tau_T \\ H^0(T', \Omega_{T'}^1) & \xrightarrow{h^*} & H^0(T, \Omega_T^1) \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Da V und V' die universellen Überlagerungen von T und T' sind, gibt es eine holomorphe Abbildung $\bar{h} : V \rightarrow V'$ mit $\bar{h}(v + \gamma) - \bar{h}(v) \in \Gamma'$ für alle $v \in V$ und $\gamma \in \Gamma$. Aus Stetigkeitsgründen ist $\bar{h}(v + \gamma) - \bar{h}(v)$ von v unabhängig. Also sind die partiellen Ableitungen von \bar{h} invariant unter Γ und damit konstant. Also gibt es einen konstanten Vektor $a \in V'$, so daß

$$\bar{h}(v) = H(v) + a \quad (v \in V)$$

und H ist linear mit $H(\Gamma) \subset \Gamma'$. Die Kommutativität des Diagramms folgt unmittelbar aus den Definitionen. \square

Beweis von Satz(IV.2.3) Wir haben zunächst

$$\text{Alb}(X) = H^0(X, \Omega_X^1)^\vee / \text{im } H_1(X, \mathbb{Z}) = V/\Gamma$$

sowie

$$T = V'/\Gamma'.$$

Das folgende Diagramm definiert die Abbildung $\tilde{f}^* : H^0(T, \Omega_T^1) \rightarrow H^0(\text{Alb } X, \Omega_{\text{Alb}(X)}^1)$:

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \Omega_X^1) & \xleftarrow{f^*} & H^0(T, \Omega_T^1) \\ (\alpha^*)^{-1} \downarrow & \swarrow \tilde{f}^* & \\ H^0(\text{Alb}(X), \Omega_{\text{Alb}(X)}^1) & & \end{array}$$

Dies zeigt, daß \tilde{f} , falls es existiert, bis auf Translation eindeutig bestimmt ist. Da aber $f(x_0) = \tilde{f}(\alpha(x_0)) = \tilde{f}(0)$, ist \tilde{f} eindeutig bestimmt.

Um die Existenz von f zu zeigen, betrachten wir

$$u : (V')^\vee \xrightarrow{\tau_T} H^0(T, \Omega_T^1) \xrightarrow{\tilde{f}^*} H^0(\text{Alb}(X), \Omega_{\text{Alb}(X)}^1) \xrightarrow{\tau_{\text{Alb}(X)}^{-1}} V^\vee.$$

Wir müssen zeigen, daß

$${}^t u(\Gamma) \subset \Gamma'.$$

Für $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$, $(v')^\vee \in (V')^\vee$ und mit der Bezeichnung $i : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle {}^t u(i(\gamma)), (v')^\vee \rangle &= \langle i(\gamma), u((v')^\vee) \rangle \\
&= \int \alpha^*(\tilde{f}^*(\tau_T((v')^\vee))) \\
&= \int_{\gamma} f_*(\tau_T((v')^\vee)) \\
&= \int_{f_*(\gamma)} \tau_T((v')^\vee) \\
&\stackrel{(3)}{=} \langle t_T^{-1}(f_*\gamma), (v')^\vee \rangle
\end{aligned}$$

Da dies für alle $v' \in V'$ gilt, folgt

$${}^t u(i(\gamma)) = t_T^{-1}(f_*\gamma)$$

d.h., da $f_*(H_1(X, \mathbb{Z})) \subset H_1(T, \mathbb{Z})$, erhält man

$${}^t u(i(\gamma)) \in \Gamma'.$$

□

Bemerkungen:

- (i) Ist C eine projektive Kurve, so stimmen die Jacobivarietät $\text{Jac}(C)$ und die Albanesevariетät $\text{Alb}(C)$ überein. Damit ist die Periodenmatrix bezüglich einer geeigneten Basis von der Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & \tau_{11} & \dots & \tau_{1g} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \tau_{g1} & \dots & \tau_{gg} \end{pmatrix}$$

wobei $\tau = (\tau_{ij})$ eine symmetrische Matrix mit $\text{Im } \tau > 0$ ist. Damit ist in diesem Fall $\text{Alb}(C)$ eine prinzipal polarisierte abelsche Variетät. Ferner ist $\alpha : C \subset \text{Alb}(C) = \text{Jac}(C)$ die Abel-Jacobi Einbettung.

- (ii) $\text{Alb}(X)$ ist stets eine abelsche Variетät.

Folgerungen:

- (i) Es gilt

$$\dim \text{Alb}(X) = q(X) = h^1(\mathcal{O}_X).$$

Ist $q(X) = 0$, so ist $\text{Alb}(X) = \{0\}$. Insbesondere ist jede Abbildung $X \rightarrow T$ in einem Torus T konstant.

- (ii) Das Bild $\alpha(X) \subset \text{Alb}(X)$ ist in keinem echtem Untertorus von $\text{Alb}(X)$ enthalten. (Wäre $i : A \subset \text{Alb}(X)$ ein solcher Untertorus, würde es die Abbildung $\alpha^* : H^0(\Omega_{\text{Alb}(x)}^1) \rightarrow H^0(\Omega_X^1)$ über $H^0(\Omega_A^1)$ faktorisieren und wäre daher kein Isomorphismus.)

(iii) Die Konstruktion der Albanesevarietät ist funktoriell. D.h. zu jedem Morphismus $f : X \rightarrow Y$ gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ \text{Alb}(X) & \xrightarrow{\alpha(f)} & \text{Alb}(Y). \end{array}$$

Wegen Bemerkung (ii) gilt folgendes: Ist f surjektiv, dann auch $\alpha(f)$.

(iv) Ist A eine abelsche Varietät, so ist $\text{Alb}(A) = A$.

Wir betrachten schließlich den Fall, daß das Bild der Albanesevarietät eine Kurve ist.

Satz IV.2.5 *Das Bild der Albaneseabbildung $\alpha : X \rightarrow \text{Alb}(X)$ sei eine Kurve C . Dann sind alle Fasern zusammenhängend. Zudem ist C eine glatte Kurve von Geschlecht $q(X)$.*

Beweis. Wir betrachten die Steinfaktorisierung der Albaneseabbildung

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & C \subset \text{Alb}(X) \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & & D \end{array}$$

Da X normal ist, ist auch D eine normale Kurve, also glatt. Das obige Diagramm induziert das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & \text{Alb}(X) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha_D & & \parallel \\ \text{Alb}(X) & \xrightarrow{\alpha(f)} & \text{Alb}(D) & \xrightarrow{\alpha(g)} & \text{Alb}(X). \end{array}$$

Da f surjektiv ist, muß auch $\alpha(f)$ surjektiv sein. Es gilt $\alpha(g) \circ \alpha(f) \circ \alpha = g \circ f = \alpha$. Aus der universellen Eigenschaft von α folgt, daß $\alpha(g) \circ \alpha(f) = id$. Da $\alpha(f)$ surjektiv ist, muß $\alpha(f)$, und damit auch $\alpha(g)$ ein Isomorphismus sein. Da die Abel-Jacobi Abbildung α_D eine Einbettung ist, folgt, daß $g = \alpha(g) \circ \alpha_D$ ebenfalls eine Einbettung, also ein Isomorphismus auf sein Bild ist. Schließlich gilt $g(C) = g(D) = \dim \text{Alb}(D) = \dim \text{Alb}(X) = q(X)$. \square

4.3 Kodaira-Dimension

Es sei nun X eine normale projektive Varietät und \mathcal{L} ein Geradenbündel auf X . Wir nehmen zunächst an, daß es ein $k_0 > 0$ mit $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k_0}) \neq 0$ gibt, und setzen

$$R(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}).$$

Dies können wir als graduierten Ring betrachten. Dazu definieren wir den Körper der homogenen Brüche

$$Q(X, \mathcal{L}) = \left\{ \frac{s}{t}; \quad s, t \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}), t \neq 0 \right\}.$$

Man kann $Q(X, \mathcal{L})$ als Unterkörper von $K(X)$ auffassen. Ist $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(H)$ wobei H sehr ampel ist, so ist $Q(X, \mathcal{L}) = K(X)$ (vgl. unten), also gilt $\text{tr deg } Q(X, \mathcal{L}) = \dim X$.

Satz IV.3.1 *Der Transzendenzgrad von $Q(X, \mathcal{L})$ über \mathbb{C} ist endlich und höchstens gleich der Dimension von X . Ferner ist $Q(X, \mathcal{L})$ algebraisch abgeschlossen in $K(X)$.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar, da $Q(X, \mathcal{L})$ in $K(X)$ enthalten ist. Es sei $f \in K(X)$ algebraisch über $Q(X, \mathcal{L})$. Dann haben wir eine Gleichung

$$f^r + a_1 f^{r-1} + \dots + a_r = 0, \quad a_i = \frac{s_i}{t}, \quad s_i, t \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}).$$

Dann ist $h = f \cdot t$ ein meromorpher Schnitt von $\mathcal{L}^{\otimes k}$. Dieser erfüllt die Gleichung

$$h^r + s_1 h^{r-1} + s_2 t h^{r-2} + \dots + s_r t^{r-1} = 0.$$

Die Koeffizienten $s_i t^{i-1}$ sind reguläre Schnitte in $\mathcal{L}^{\otimes ik}$. Da X normal ist, folgt, daß in jedem Punkt h ein regulärer Schnitt von $\mathcal{L}^{\otimes k}$ ist, d.h. $h \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k})$ und $f = h/t$ ist ein Element von $Q(X, \mathcal{L})$. \square

Definition:

(i) Die \mathcal{L} -Dimension $\kappa(X, \mathcal{L})$ ist definiert als

$$\kappa(X, \mathcal{L}) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } h^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) = 0 \text{ für } k \geq 1 \\ \text{tr deg}_{\mathbb{C}} Q(X, \mathcal{L}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Die Kodairadimension von X ist $\kappa(X) = \kappa(X, K_X)$.

Bemerkung: $\kappa(X, \mathcal{L}) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim X\}$.

Wir betrachten nun die rationalen Abbildungen

$$\varphi|_{\mathcal{L}^{\otimes k}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_k} \quad (N_k = h^0(\mathcal{L}^{\otimes k}) - 1).$$

Es sei W_k das Bild von X unter dieser Abbildung. Ist s_0, \dots, s_{N_k} eine Basis von $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k})$, so ist

$$K(W_k) = \mathbb{C}(s_1/s_0, \dots, s_{N_k}/s_0).$$

Es sei nun

$$d_0 := \min \{k > 0; h^0(\mathcal{L}^{\otimes k}) \neq 0\}.$$

Lemma IV.3.2 *Es gibt eine Zahl $k_0 > 0$, so daß $K(W_{kd_0}) = Q(X, \mathcal{L})$ für $k \geq k_0$.*

Beweis. Da $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes d_0}) \neq 0$ gibt es Einbettungen $K(W_{kd_0}) \subset K(W_{(k+1)d_0})$. Es gilt

$$Q(X, \mathcal{L}) = \bigcup_{k \geq 0} K(W_{kd_0})$$

da man homogene Brüche nach Erweiterung stets als Brüche von Elementen in $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes kd_0})$ schreiben kann. Wir haben Inklusionen

$$\mathbb{C} \subset Q(X, \mathcal{L}) \subset K(X).$$

$K(X)$ ist endlich erzeugt über \mathbb{C} . Also ist auch $Q(X, \mathcal{L})$ endlich erzeugt über \mathbb{C} . Damit gibt es ein k_0 , ab dem die Inklusion $K(W_{kd_0}) \subset K(W_{(k+1)d_0})$ stationär wird, und für dieses k_0 gilt die Behauptung. \square

Korollar IV.3.3 $\kappa(X, \mathcal{L}) = \max \dim W_k$.

Beweis. Da $K(W_k) \subset Q(X, \mathcal{L})$ ist stets $\dim W_k = \text{tr deg } {}_{\mathbb{C}}K(W_k) \leq \text{tr deg } {}_{\mathbb{C}}Q(X, \mathcal{L}) = \kappa(X, \mathcal{L})$. Andererseits gilt $K(W_{k_0}) = Q(X, \mathcal{L})$ für $k \geq k_0$. Dies zeigt die Behauptung. \square

Satz IV.3.4 Für $k \geq k_0$ sei $\varphi_{|\mathcal{L}^{\otimes k d_0}|} : X \longrightarrow W_{k d_0}$ ein Morphismus. Dann ist die allgemeine Faser von $\varphi_{|\mathcal{L}^{\otimes k d_0}|}$ zusammenhängend.

Beweis. Wir betrachten die Stein-Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & W_{k d_0} \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & & Y \end{array}$$

von $\varphi = \varphi_{|\mathcal{L}^{\otimes k d_0}|}$. Dies liefert folgende Inklusion von Körpern

$$K(X) \supset K(Y) \supset K(W_{k d_0}) = Q(X, \mathcal{L}).$$

Dabei ist $[K(Y) : K(W_{k d_0})]$ endlich algebraisch. Da nach Satz (IV.3.1) der Körper $K(W_{k d_0})$ in $K(X)$ algebraisch abgeschlossen ist, folgt $K(Y) = K(W_{k d_0})$, d.h. g ist birational. Da g endlich ist, ist die allgemeine Faser von g ein Punkt. Damit stimmen die allgemeinen Fasern von φ und f überein. \square

Bemerkung: Da X normal ist, ist auch Y normal. Also ist $g : Y \longrightarrow W_{k d_0}$ die Normalisierung.

Schließlich sei D ein effektiver Divisor auf X und $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$.

Theorem IV.3.5 Es sei X eine normale projektive Varietät und D ein effektiver Divisor auf X . Es sei $\kappa = \kappa(X, \mathcal{O}_X(D)) > 0$. Dann gibt es $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\alpha k^\kappa \leq \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(kD)) \leq \beta k^\kappa$$

für $k \gg 0$.

Satz IV.3.6 Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine unverzweigte Überlagerung zwischen glatten, projektiven Varietäten. Dann gilt für $\mathcal{L} \in \text{Pic } Y$:

$$(i) \quad \kappa(X, f^* \mathcal{L}) = \kappa(Y, \mathcal{L})$$

$$(ii) \quad \kappa(X) = \kappa(Y).$$

Beweis. Da f unverzweigt ist, gilt $f^* K_Y = K_X$. Also genügt es, (i) zu zeigen. Wir haben eine Inklusion

$$f^* : H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes k}) \longrightarrow H^0(X, f^* \mathcal{L}^{\otimes k})$$

Dies zeigt, daß

$$\kappa(X, f^* \mathcal{L}) \geq \kappa(Y, \mathcal{L}).$$

Es bleibt, die Umkehrung zu zeigen. Ist $\kappa(X, f^* \mathcal{L}) = -\infty$, so ist auch $\kappa(Y, \mathcal{L}) = -\infty$. Es sei dies nicht der Fall.

1. Fall: $f : X \rightarrow Y$ sei galoisch, d.h. es gibt eine endliche Gruppe G , die effektiv auf X operiert, so daß $f : X \rightarrow Y$ durch die Operation der Gruppe G gegeben ist. Wir wählen dann k so, daß das Bild der Abbildung

$$\varphi = \varphi_{|\mathcal{L}^{\otimes k}|} : X \dashrightarrow W_k \subset \mathbb{P}^n$$

die Dimension $\kappa = \kappa(X, f^*\mathcal{L})$ hat. Ist s_0, \dots, s_n eine Basis von $H^0(X, f^*\mathcal{L}^{\otimes k})$ so ist

$$\kappa(X, f^*\mathcal{L}) = \text{tr deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s_1/s_0, \dots, s_n/s_0).$$

Es sei $L = \mathbb{C}(s_1/s_0, \dots, s_n/s_0)$. Die Gruppe G operiert auf L . Es sei $K = L^G$ der Fixkörper. Dann ist $[L : K]$ endlich algebraisch. Man kann sogar ein Erzeugendensystem von K über \mathbb{C} angeben. Dazu betrachten wir die Polynome

$$\prod_{g \in G} (X - g^*(s_i/s_0)) = X^m + a_1(s_i/s_0)X^{m-1} + \dots + a_m(s_i/s_0)$$

wobei $m = |G|$ und $i = 1, \dots, n$. Die Elemente $a_l(s_i/s_0); l = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$ erzeugen K über \mathbb{C} . Es sei $t_0 = \prod_{g \in G} g^*(s_0)$. Dann sind t_0 und $t_0 a_l(s_i/s_0)$ reguläre G -invariante Schnitte von $H^0(X, f^*\mathcal{L}^{\otimes km})$ und können damit als Elemente in $H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes km})$ interpretiert werden. Es folgt, daß $a_l(s_i/s_0) \in Q(Y, \mathcal{L})$, d.h. wir haben eine Einbettung von K in $Q(Y, \mathcal{L})$. Damit gilt

$$\kappa(X, f^*\mathcal{L}) = \text{tr deg}_{\mathbb{C}} L = \text{tr deg}_{\mathbb{C}} K \leq \text{tr deg}_{\mathbb{C}} Q(Y, \mathcal{L}) = \kappa(Y, \mathcal{L}).$$

2. Fall: Es sei $f : X \rightarrow Y$ allgemein. Dann ist

$$f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$$

injektiv. Es gibt einen Normalteiler $N \triangleleft \pi_1(Y)$ mit

$$N \subset f_*\pi_1(X) \subset \pi_1(Y)$$

von endlichem Index in $\pi_1(Y)$. Der Normalteiler N liefert eine galoische Überlagerung $f' : X' \rightarrow Y$ mit Galoisgruppe $G = \pi_1(Y)/N$, so daß ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ g \swarrow & \downarrow f' & \\ X & & Y \\ f \searrow & & \end{array}$$

existiert. Da

$$\kappa(X, f^*\mathcal{L}) \leq \kappa(X', g^*f^*\mathcal{L}) = \kappa(X', (f')^*\mathcal{L}) = \kappa(Y, \mathcal{L})$$

hat man diesen Fall auf den vorigen zurückgeführt. \square

Beispiele: (i) Wir betrachten Produkte von Kurven

$$S = C \times D$$

mit Projektionen p , bzw. q auf C , bzw. D . Dann ist

$$K_S = p^*K_C \otimes q^*K_D.$$

(1) Ist $C = \mathbb{P}^1$ (oder $D = \mathbb{P}^1$), so hatten wir schon gesehen, daß

$$H^0(S, K_S^{\otimes n}) = p^*H^0(C, K_C^{\otimes n}) \otimes q^*H^0(D, K_D^{\otimes n}) = 0$$

für alle $n \geq 1$, also $\kappa(S) = -\infty$.

(2) Es sei nun $g(C) = 1, g(D) = 1$. Dann ist $K_C = \mathcal{O}_C$ sowie $K_D = \mathcal{O}_D$ und $K_S = \mathcal{O}_S$. Also $Q(S, K_S) = \mathbb{C}$, und $\kappa(S) = 0$.

(3) Es sei $g(C) = 1, g(D) \geq 2$. Nun gilt

$$H^0(S, K_S^{\otimes n}) = q^*H^0(D, K_D^{\otimes n})$$

und

$$\varphi_{|K_S^{\otimes n}|} : S \longrightarrow D \subset \mathbb{P}(H^0(K_D^{\otimes n}))$$

also ist $\kappa(S) = 1$.

(4) Schließlich sei $g(C) \geq 2, g(D) \geq 2$. Dann erhalten wir

$$\varphi_{|K_S^{\otimes n}|} : S = C \times D \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(C, K_C^{\otimes n})) \times \mathbb{P}(H^0(D, K_D^{\otimes n}))$$

also $\kappa(S) = 2$.

(ii) Es sei

$$S = \{F_d = 0\} \subset \mathbb{P}^3 \quad (F_d \text{ homogen von Grad } d).$$

Dann ist

$$K_S = \mathcal{O}_S(d-4)$$

und

$$\kappa(S) = \begin{cases} -\infty & d \leq 3 \\ 0 & d = 4 \\ 2 & d \geq 5 \end{cases}$$

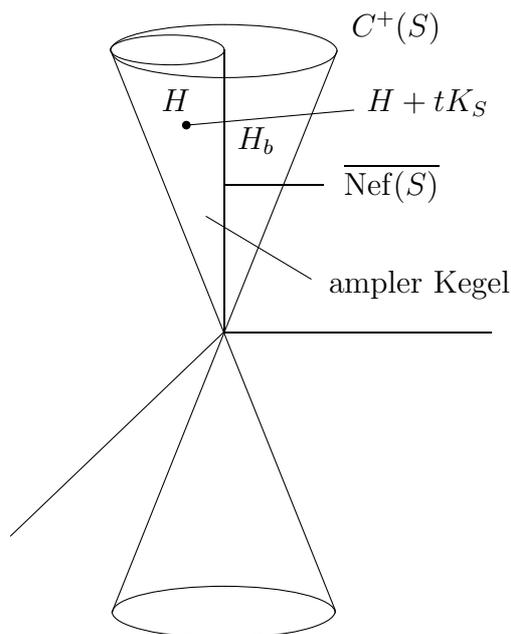
V Das Rationalitätslemma

5.1 Das Rationalitätslemma

Es sei nun wieder S eine projektive Fläche. Wir hatten den reellen Vektorraum

$$N_{\mathbb{R}}(S) = NS(S) \otimes \mathbb{R}$$

betrachtet. Die Dimension von $N_{\mathbb{R}}(S)$ ist die Picardzahl ρ . Auf $N_{\mathbb{R}}(S)$ haben wir eine Form mit Signatur $(1, \rho - 1)$. Wir hatten bereits den Nef-Kegel und den amplen Kegel in $N_{\mathbb{R}}(S)$ betrachtet:



Es sei nun H ein ample Divisor. Wir nehmen an, daß K_S nicht nef ist. Also ist $H + tK_S$ für $t \gg 0$ nicht nef. Wir definieren

$$b := \sup\{t \in \mathbb{R}; H + tK_S \text{ ist nef}\}.$$

Lemma V.1.1 *b ist rational.*

Bevor wir den Beweis geben können, benötigen wir noch

Theorem V.1.2 (Kodairascher Verschwindungssatz) *Es sei \mathcal{L} ein amples Geradenbündel auf S . Dann gilt:*

- (i) $H^i(S, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ für $i \leq 1$.
- (ii) $H^i(S, K_S \otimes \mathcal{L}) = 0$ für $i \geq 1$.

Beweis. (i) und (ii) sind wegen Serre-Dualität äquivalent zueinander. Man kann nun Beweise mittels Hodge Theorie oder mit Hilfe des Satzes von Reider geben. \square

Beweis des Rationalitätslemmas (nach Wilson). Wir betrachten die Funktion

$$P(v, u) := \chi(vH + uK_S).$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in u und v . Sind $u \geq 1, v > 0$ mit $(u-1)/v < b$ so ist $vH+(u-1)K_S$ ample. Nach dem Kodairaschen Verschwindungssatz ist $H^i(vH+uK_S) = 0$ für $i = 1, 2$. Also folgt $P(v, u) = H^0(vH + uK_S) \geq 0$.

Wir nehmen nun an, daß b irrational ist. Dann gibt es nach einem Ergebnis der Zahlentheorie beliebig große natürliche Zahlen p, q mit

$$(1) \quad \frac{p}{q} - \frac{1}{3q} < b < \frac{p}{q}.$$

Das Polynom $P(kq, kp)$ ist quadratisch in k . Falls es identisch verschwindet, muß $vp - uq$ ein Teiler von $P(v, u)$ sein. Wählen wir p, q groß genug, so können wir annehmen, daß dies nicht der Fall ist. Für $k = 1, 2, 3$ erfüllen die Zahlen $v = kq, u = kp$ die Ungleichung $0 \leq (u-1)/v < b$, d.h. es gilt $P(kq, kp) \geq 0$. Nun hat ein von Null verschiedenes quadratisches Polynom höchstens zwei reelle Nullstellen. Also gibt es insbesondere eine rationale Zahl $t_0 = u/v > b$ mit $h^0(vH + uK_S) > 0$. D.h. es gibt einen Divisor $D \geq 0$ mit $D \sim vH + uK_S$, so daß

$$(2) \quad \frac{1}{v}D = H + t_0K_S \sim \sum a_j \Gamma_j, \quad a_j \geq 0$$

als \mathbb{Q} -Divisoren. Wir setzen

$$H_{t_0} = H + t_0K_S.$$

Da $t_0 > b$ ist H_{t_0} nicht nef. Da H_{t_0} effektiv ist, kann es nur auf den Kurven Γ_j negativ werden. Es existieren $b_j \in \mathbb{Q}$ mit $H_{t_0} \cdot \Gamma_j = b_j H \cdot \Gamma_j$. Dann ist

$$c = \min_j b_j < 0.$$

Es folgt, daß der Divisor $H_{t_0} - cH$ nef ist, und

$$H_b = H + \frac{t_0}{1-c} K_S$$

ist der gesuchte Divisor, d.h. $b = t_0/(1-c)$ ist rational. □

5.2 Anwendungen

Satz V.2.1 *Es sei S eine minimale Fläche. Ist K_S nicht nef, so ist S entweder geometrische Regelfläche oder der \mathbb{P}^2 .*

Beweis. Wir betrachten den Halbstrahl $\mathbb{Q}_{\geq 0}(-K_S) \subset N_{\mathbb{Q}}(S)$.

1. Fall: Alle amplen Divisoren in S liegen auf diesem Halbstrahl. Dies bedeutet insbesondere, daß $-K_S$ ample ist und $\rho(S) = 1$ ist. Der Verschwindungssatz von Kodaira besagt dann, daß $h^0(K_S) = h^1(K_S) = 0$. Insbesondere gilt $q = p_g = 0$. Damit folgt auch, daß

$$\text{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q} = H^2(S, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}.$$

Es gilt also $b_0(S) = 1, b_1(S) = 0, b_2(S) = 1$, d.h.

$$e(S) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i b_i(S) = 3.$$

Nun besagt Noethers Formel, daß

$$K^2 + e(S) = 12 \chi(\mathcal{O}_S)$$

d.h., da $e(S) = 3$ und $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g = 1$ folgt $K^2 = 9$.

Wegen der Nichtausgeartetheit des Schnittprodukts muß es einen amplen Divisor H geben mit $H^2 = 1$, d.h. $3H \equiv -K_S$. Da $H - K_S$ ample ist, folgt wiederum aus dem Kodairaschen Verschwindungssatz, daß $h^1(H) = h^2(H) = 0$. Damit ergibt Riemann-Roch für H :

$$h^0(H) = \frac{1}{2}H \cdot (H - K_S) + 1 = 3.$$

Wir erhalten also eine rationale Abbildung

$$\varphi_{|H|} : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2.$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß $|H|$ keine Basispunkte hat, d.h. daß $\varphi_{|H|}$ ein Morphismus ist. Da H in $\text{Pic}(S)$ nicht divisibel ist, können wir zunächst ausschließen, daß eine Kurve im Basisort von $|H|$ liegt. Es sei nun P ein Basispunkt und $\sigma : \tilde{S} \rightarrow S$ die Aufblasung in P . Wir bezeichnen den exzeptionellen Divisor mit E . Dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & & \\ \sigma \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\ S & \xrightarrow{\varphi_{|H|}} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

wobei $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{|\tilde{H}|}$ mit $\tilde{H} = \sigma^*H - E$. Wegen $\tilde{H}^2 = 0$ folgt, daß $|\tilde{H}|$ basispunktfrei ist, und daß daher $\tilde{\varphi}$ ein Morphismus ist. Ebenfalls wegen $\tilde{H}^2 = 0$ folgt, daß das Bild von $\tilde{\varphi}$ eine ebene Kurve C in \mathbb{P}^2 ist. Da $\tilde{H} \cdot E = 1$ muß C eine Gerade sein, im Widerspruch zu $h^0(H) = h^0(\tilde{H}) = 3$. Also ist $\varphi_{|H|} : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ ein Morphismus. Da $H^2 = 1$ gilt, ist $\varphi_{|H|}$ birational. Da H ample ist, kann $\varphi_{|H|}$ keine Kurven kontrahieren. Aus unserer Kenntnis über birationale Morphismen folgt dann, daß $\varphi_{|H|}$ ein Isomorphismus ist.

2. Fall: Es gibt einen amplen Divisor H , der nicht auf $\mathbb{Q} \cdot K_S$ liegt. Es sei H ein solcher Divisor. Wir wenden das Rationalitätslemma auf H und K_S an. Es sei

$$L = vH + uK_S$$

mit

$$b = u/v = \sup\{t \in \mathbb{R}; H_t = H + tK_S \text{ ist nef}\}.$$

Da der Nef-Kegel abgeschlossen ist, ist auch L nef. Insbesondere gilt $L^2 \geq 0$. Nach Konstruktion ist $L - cK_S$ ample für $c \in \mathbb{Q}^+, c \leq u$. Insbesondere ist also $mL - K_S$ ample für $m \geq 1$. Serredualität und der Verschwindungssatz von Kodaira ergeben

$$H^2(mL) = H^0(-(mL - K_S)) = 0.$$

Also folgt aus Riemann-Roch, daß

$$(3) \quad h^0(mL) \geq \chi(mL) = \chi(S) + \frac{1}{2}mL.(mL - K_S).$$

Wir müssen nun die Fälle $L^2 > 0$ und $L^2 = 0$ unterscheiden.

(i) Wir betrachten zunächst den Fall $L^2 > 0$. Wir behaupten, daß für jeden effektiven Divisor $D > 0$ gilt, daß $L.D > 0$. Da L nef ist, gilt zunächst $L.D \geq 0$ für jeden irreduziblen effektiven Divisor D . Aus $L.D = 0$ und $D > 0$ folgt nach dem algebraischen Indexsatz, daß $D^2 < 0$. Nach Konstruktion von L ist $K_S.D < 0$. Aus den beiden Ungleichungen folgt, daß D eine (-1) -Kurve ist, im Widerspruch zur Minimalität von S . Nun folgt aber aus $L^2 > 0$ und $L.D > 0$ für alle effektiven $D > 0$, daß nach dem Nakai-Moishezon Kriterium L ample ist. Dies widerspricht der Konstruktion von L .

(ii) Es sei nun $L^2 = 0$. Da L nef ist, gilt $L.H \geq 0$. Wäre $L.H = 0$ so würde aus dem algebraischen Indexsatz folgen, daß $L \equiv 0$, bzw. $H \equiv c(-K_S)$ für ein $c > 0, c \in \mathbb{Q}$. Diesen Fall hatten wir aber bereits behandelt. Also gilt $(L.H) > 0$. Wegen $L^2 = 0$ gilt

$$0 = \frac{1}{v}L^2 = (L.H + bL.K_S).$$

Also folgt, daß $L.K_S < 0$. Nun folgt aus (3), daß $h^0(mL)$ mit m wächst. Nach eventuellem Ersetzen von L durch mL können wir daher annehmen, daß $\dim |L| \geq 1$. Wir zerlegen L in seinen variablen Anteil und seinen Basisdivisor

$$|L| = |L'| + L_{\text{fixed}}.$$

Da $|L'|$ keinen Basisdivisor besitzt, ist L' nef. Aus $L'.L \geq 0$ und $L.L_{\text{fixed}} \geq 0$ folgt zusammen mit

$$0 = L.L = L'.L + L_{\text{fixed}}.L$$

daß

$$L'.L = L_{\text{fixed}}.L = 0.$$

Andererseits zeigt

$$0 = L'.L = L'.L' + L'.L_{\text{fixed}}$$

zusammen mit L' nef, daß $L'^2 = L'.L_{\text{fixed}} = 0$.

Wir betrachten nun einen Pencil $\mathbb{P}^1 \subset |L'|$ ohne Basisdivisor. Es sei F eine Zusammenhangskomponente eines allgemeinen Elements des Pencils \mathbb{P}^1 . Aus $L'.L = 0$ und L nef folgt $L.F = 0$. Ebenso folgt aus $L'.L_{\text{fixed}} = 0$, daß $F.L_{\text{fixed}} = 0$ (da F in einem allgemeinen Element des Pencils enthalten ist, können wir annehmen, daß F keine Komponente von L_{fixed} enthält). Damit gilt

$$F.L' = F.(L - L_{\text{fixed}}) = 0.$$

Es seien $F_i, i = 1, \dots, k$ die anderen Zusammenhangskomponenten des gewählten Elements in dem Pencil \mathbb{P}^1 . Damit ist

$$F^2 = F(L' - F_1 - \dots - F_k) = F.L' = 0.$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\varphi_{\mathbb{P}^1} : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Da \mathbb{P}^1 keinen Basisdivisor hat, und $L'^2 = 0$, ist \mathbb{P}^1 ohne Basispunkte, d.h. $\varphi_{\mathbb{P}^1}$ ist ein Morphismus. Steinfaktorisierung ergibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow \psi & \nearrow g \\ & & C \end{array}$$

wobei ψ zusammenhängende Fasern hat und C eine glatte Kurve ist. Eine solche Faser ist F . Da $F^2 = 0$ und $L.F = 0$ folgt $K_S.F < 0$, bzw. daß F glatt rational ist. Damit ist S eine Regelfläche. Da S minimal ist, ist es nach Satz (III.1.5) sogar eine geometrische Regelfläche. \square

Korollar V.2.2 *Es seien S und S' minimale Flächen, die keine Regelflächen sind. Dann ist jede birationale Abbildung $f : S \dashrightarrow S'$ ein Isomorphismus. Insbesondere besitzen Flächen, die keine Regelflächen sind, genau ein minimales Modell.*

Beweis. Nach obigem Satz sind K_S und $K_{S'}$ nef. Die Aussage folgt aus Satz (II.2.12). \square

Satz V.2.3 *Es sei S eine Fläche mit K_S nef. Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten für S :*

- (i) $K_S^2 > 0$. Dann gilt $P_m \geq \frac{1}{2}m(m-1)K_S^2 + 1 - q + p_g$ für $m \geq 2$. Es gilt $P_2 > 0$.
- (ii) $K_S^2 = 0$, $q = 0$ und $P_2 > 0$.
- (iii) $K_S^2 = 0$, $p_g > 0$ und $q > 0$.
- (iv) $K_S^2 = 0$, $p_g = 0$, $q = 1$ und $b_2 = 2$.

Beweis. Da K_S nef ist, folgt zunächst $K_S^2 \geq 0$. Es gilt für die Fläche S , daß

$$b_1 = h^{10} + h^{01} = 2q$$

also

$$e(S) = 2b_0 - 2b_1 + b_2 = 2 - 4q + b_2.$$

Damit lautet Noethers Formel

$$K_S^2 + (2 - 4q + b_2) = 12(1 - q + p_g).$$

Wir nehmen zunächst an, daß $p_g = 0$. Dann ist

$$(4) \quad b_2 = 10 - 8q - K_S^2.$$

Da $b_2 \geq 0$, folgt $q \leq 1$. Ist $q = 1$ und $K_S^2 = 0$, so folgt $b_2 = 2$. Dies ist Fall (iv).

In jedem Fall ergibt sich aus Riemann-Roch und Serre-Dualität

$$(5) \quad h^0(mK_S) + h^0(-(m-1)K_S) \geq \frac{1}{2}m(m-1)K_S^2 + 1 - q + p_g.$$

Da K_S nef ist, ist $h^0(-(m-1)K_S) = 0$ für $m \geq 2$ oder $K_S^2 = 0$.

Es sei nun $K_S^2 > 0$. Dann ist $h^0(-(m-1)K_S) = 0$ und die Ungleichung für P_m folgt aus (5). Ist $p_g > 0$, so ist auch $P_2 > 0$. Ist $p_g = 0$, so folgt aus (4), daß $q \leq 1$ und $P_2 > 0$ folgt aus (5).

Schließlich sei $K_S^2 = 0$. Ist $q = 0$, so folgt wiederum $P_2 > 0$ aus (5). Den Fall $p_g = 0$, $q = 1$ hatten wir bereits oben abgehandelt. Es bleibt $p_g > 0$, $q > 0$, also Fall (iii). \square

Theorem V.2.4 (Castelnuovo) *Eine Fläche S ist genau dann rational, wenn $q = P_2 = 0$ gilt.*

Beweis. Wir hatten bereits gesehen, daß für rationale Flächen $q = P_2 = 0$ ist. Ist umgekehrt $q = P_2 = 0$, so kann nach obigem Satz(V.2.3) das kanonische Bündel K_S nicht nef sein. Aus Satz (V.2.1) folgt dann, daß S eine Regelfläche ist. Es sei S birational äquivalent zu $C \times \mathbb{P}^1$. Nach Satz (III.1.11) ist $q(S) = g(C)$. Also ist C rational, und damit ist S rational. \square

VI Die Enriques Klassifikation

6.1 Der Klassifikationssatz

Wir wollen zunächst noch die verschiedenen Klassen von Flächen durch Beispiele kennenlernen.

Definition: Eine *Faserung* ist ein surjektiver Morphismus $f : S \rightarrow C$ einer Fläche S auf eine glatte Kurve C , so daß alle Fasern zusammenhängend sind. Hat die allgemeine Faser Geschlecht g , so sprechen wir von einer *Geschlecht $-g$ Faserung*. Im Fall $g = 1$ sprechen wir auch von einer *elliptischen Faserung*.

Beispiele:

(i) $S = C \times D$. Dann besitzt S zwei Strukturen als Faserungen.

(ii) Wir betrachten folgenden Pencil von kubischen Kurven in \mathbb{P}^2 :

$$C_{(t_0:t_1)} = \{t_0(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + t_1x_0x_1x_2 = 0\}.$$

Damit können wir eine Fläche $S \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ wie folgt definieren

$$S = \{(t, x) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, x \in C_t\}.$$

Die Projektion auf \mathbb{P}^1 liefert eine Faserung $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ mit Fasern $C_{(t_0:t_1)}$. Dies ist eine elliptische Faserung.

Die Fläche S kann man auch anders beschreiben. Sei

$$\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0\} \cap \{x_0x_1x_2 = 0\} = \{P_1, \dots, P_9\}.$$

Dann ist

$$S = \tilde{\mathbb{P}}_2(P_1, \dots, P_9).$$

Insbesondere ist S eine nicht minimale rationale Fläche.

(iii) Dieses Beispiel kann man verallgemeinern. Es sei dazu C eine Kurve. $|D|$ sei ein basispunktfreies Linearsystem auf C . In $C \times \mathbb{P}^2$ betrachten wir S als allgemeines Element des Linearsystems $|p^*D \otimes q^*(3H)|$ wobei p , bzw. q die Projektionen auf C , bzw. \mathbb{P}^2 sind. Nach Bertini ist S glatt. Projektion auf C liefert eine elliptische Faserung $S \rightarrow C$. Nach der Adjunktionsformel ist

$$K_S = p^*(K_C \otimes D).$$

Ist $\deg D > -\deg K_C = 2 - 2g$, so ist $\deg(K_C \otimes D) > 0$ und S hat Kodairadimension $\kappa(S) = 1$.

Wir wollen nun bielliptische Flächen betrachten. Dazu sei

$$E = E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \quad (\text{Im } \tau > 0)$$

eine elliptische Kurve. Die Gruppe $\text{Aut}(E)$ der Automorphismen von E hat die Gestalt

$$0 \rightarrow E \rightarrow \text{Aut}(E) \rightarrow G \rightarrow 1$$

wobei E durch Translation auf sich selbst operiert und G eine endliche Gruppe ist. Es ist $G \cong \mathbb{Z}_n$ wobei folgende Fälle auftreten:

$$\begin{aligned} n = 4 : & \quad E \cong E_i \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) \\ n = 6 : & \quad E \cong E_\rho \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\rho) \quad (\rho = e^{2\pi i/3}) \\ n = 2 : & \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Für jede elliptische Kurve E hat man die Involution $x \mapsto -x$. In den anderen Fällen ist der Automorphismus durch Multiplikation mit i , bzw. $-\rho$ gegeben.

Wir betrachten nun ein Produkt $E \times F$ von elliptischen Kurven. Es sei G eine endliche Gruppe mit $G \subset \text{Aut}(E)$ und $G \subset \text{Aut}(F)$. Auf E operiere G durch Translationen. Dann ist G von der Form $G = \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$. Auf F operiere G so, daß $F/G \cong \mathbb{P}^1$. Damit ist $G = T \times A$ wobei T durch Translation auf F operiert und A den Ursprung von F fest läßt. Die Punkte von T müssen unter A invariant sein (da $G = T \times A$). Da $F/G \cong \mathbb{P}^1$ kann A auf F nicht nur durch Translationen operieren, d.h. $A \neq 0$. Man kann leicht alle möglichen Fälle aufzählen (E ist beliebig).

Typ	F	G	Operation von G auf F
$a^1)$	beliebig	\mathbb{Z}_2	$x \mapsto -x$
$a^2)$	beliebig	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$x \mapsto -x, x \mapsto x + e_1 \quad (2e_1 = 0)$
$b^1)$	F_ρ	\mathbb{Z}_3	$x \mapsto \rho x$
$b^2)$	F_ρ	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$x \mapsto \rho x, x \mapsto x + (1 - \rho)/3$
$c^1)$	F_i	\mathbb{Z}_4	$x \mapsto ix$
$c^2)$	F_i	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$x \mapsto ix, x \mapsto x + (1 + i)/2$
$d)$	F_ρ	\mathbb{Z}_6	$x \mapsto -\rho x$.

Da G auf E durch Translationen operiert, ist die Operation von G auf $E \times F$ frei und $S = E \times F/G$ ist wieder eine glatte Fläche.

Um nun die Invarianten von S zu berechnen, lohnt es sich, weiter auszuholen. Es seien C' und D' Kurven. Die endliche Gruppe G operiere auf C' und D' , so daß die Operation auf dem Produkt $C' \times D'$ frei ist. Es sei $S = C' \times D'/G$. Ferner sei $C = C'/G$ und $D = D'/G$. Mit p , bzw. q sei die Projektion von S auf C , bzw. D bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} H^0(S, \Omega_S^1) &= H^0(C' \times D', \Omega_{C' \times D'}^1)^G = H^0(C', \Omega_{C'}^1)^G \oplus H^0(D', \Omega_{D'}^1)^G \\ H^0(S, K_S^{\otimes m}) &= H^0(C' \times D', K_{C' \times D'}^{\otimes m})^G = [H^0(C', K_{C'}^{\otimes m}) \otimes H^0(D', K_{D'}^{\otimes m})]^G. \end{aligned}$$

Ist C' eine elliptische Kurve und operiert G auf C' durch Translationen, so ist $H^0(C', K_{C'}^{\otimes m})$ 1-dimensional und unter der Gruppe G invariant. In diesem Fall gilt dann

$$H^0(S, K_S^{\otimes m}) = H^0(C' \times D', K_{C' \times D'}^{\otimes m})^G = H^0(D', K_{D'}^{\otimes m})^G.$$

Um nun die invarianten Unterräume zu bestimmen, benötigen wir die Hurwitzformel für die galoische Überlagerung

$$f : C' \rightarrow C = C'/G.$$

Es sei $R = \sum_j (e_j - 1)R_j$ der Verzweigungsdivisor von f . Dann gilt

$$K_{C'} = f^* K_C \otimes \mathcal{O}_{C'}(R).$$

Da die Überlagerung galoisch ist, ist die Verzweigung in allen Punkten einer Faser gleich. D.h.

$$R = \sum_j (e_j - 1) f^{-1}(Q_j).$$

Da $f^*Q_j = e_j f^{-1}(Q_j)$ ist, können wir dies auch wie folgt schreiben

$$R = \sum_j \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) f^*Q_j.$$

Also gilt

$$K_{C'}^{\otimes m} = f^*(K_C^{\otimes m} \otimes \sum_j \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) m Q_j).$$

Ein Schnitt in $H^0(K_{C'}^{\otimes m})$ der G -invariant ist, liegt notwendigerweise in

$$f^*(K_C^{\otimes m} \otimes \sum_j \left[\left(1 - \frac{1}{e_j}\right) m\right] Q_j)$$

wobei $[\]$ den ganzen Anteil bezeichnet. Also folgt

$$(1) \quad H^0(C', K_{C'}^{\otimes m})^G = H^0(K_C^{\otimes m} \otimes \sum_j \left[\left(1 - \frac{1}{e_j}\right) m\right] Q_j).$$

Für den Fall $m = 1$ ergibt sich hieraus

$$H^0(C', K_{C'})^G = H^0(C, K_C).$$

Wir setzen schließlich noch

$$(2) \quad R_m(C', G) = \sum_j \left[\left(1 - \frac{1}{e_j}\right) m\right] Q_j.$$

Lemma VI.1.1 *Es sei $S = C' \times D'$ wobei C' eine elliptische Kurve ist. Die Gruppe G operiere auf C' und D' wobei G auf C' durch Translationen operiert. Dann operiert G frei auf S und es gilt*

- (i) $q(S) = 1 + g(D'/G)$
- (ii) $p_g(S) = g(D'/G)$
- (iii) $P_m(S) = h^0(D'/G, K_{D'/G}^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}(R_m(D', G)))$.

Beweis. Unmittelbar aus obiger Diskussion. □

Definition: Eine *bielliptische (hyperelliptische)* Fläche ist eine Fläche der Form $S = E \times F/G$ wobei E und F elliptische Kurven sowie G eine endliche Gruppe ist, die auf E durch Translationen operiert mit $p_g(S) = 0$.

Bemerkung:

- (i) Nach Lemma (VI.1.1) ist $p_g(S) = 0$ äquivalent zu $g(F/G) = 0$, d.h. $F/G \cong \mathbb{P}^1$.

- (ii) Nach unserer obigen Diskussion gibt es genau 7 Typen von bielliptischen Flächen, nämlich die Typen $a^1) - d)$.

Bemerkung: Alle bielliptischen Flächen haben $q = 1$. Da $K_{E \times F} = \mathcal{O}_{E \times F}$ gilt, folgt sofort, daß $P_m \leq 1$ für alle bielliptischen Flächen. Ferner gilt $K_S^{\otimes m} = \mathcal{O}_S$ mit $m = 2$ für alle Fälle a), $m = 3$ für b), $m = 4$ für c) und $m = 6$ für d). Es ist stets $K_S \neq \mathcal{O}_S$ (da $p_g(S) = 0$). Diese Werte sind die minimalen m mit $K_S^{\otimes m}$ trivial. Es ist $\kappa(S) = 0$.

Definition:

- (i) Eine *K3-Fläche* ist eine Fläche S mit $q = 0$ und $K_S = \mathcal{O}_S$.
- (ii) Eine *Enriquesfläche* ist eine Fläche S mit $q = p_g = 0$ und $K_S^{\otimes 2} = \mathcal{O}_S$.
- (iii) Eine *abelsche Fläche* ist ein projektiver Torus der Dimension 2.

Bemerkung:

- (i) Für eine abelsche Fläche S gilt $K_S = \mathcal{O}_S$, $p_g = 1$ und $q = 2$.
- (ii) Alle diese Flächen haben $\kappa(S) = 0$.

Definition: Eine Fläche von *allgemeinem Typ* ist eine Fläche S mit $\kappa(S) = 2$. Wir wollen nun einige Beispiele für diese Flächen diskutieren.

Beispiele:

- (i) Ist $S = C \times D$ mit $g(C), g(D) \geq 2$, so ist S von allgemeinem Typ.
- (ii) Es sei

$$S = \{F_d = 0\} \subset \mathbb{P}^3 \quad (\deg F = d)$$

Dann ist $K_S = \mathcal{O}_S(d - 4)$ und für $d \geq 5$ ist S von allgemeinem Typ. Es sei $d = 4$, d.h. S ist eine Quartik. Dann ist $K_S = \mathcal{O}_S$. Wir behaupten, daß S eine K3-Fläche ist. Dazu betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0.$$

Wegen $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) = 0$ ist $q(S) = h^1(\mathcal{O}_S) = 0$.

- (iii) Ebenso erhalten wir K3-Flächen für

$$\begin{aligned} S &= \{Q_2 \cap F_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^4 \\ S &= \{Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^5. \end{aligned}$$

Dies sind die einzigen Möglichkeiten für vollständige Durchschnitte im \mathbb{P}^n .

- (iv) Zu jeder abelschen Fläche gehört eine K3-Fläche, die sogenannte *Kummerfläche*. Dazu sei A eine abelsche Fläche (z.B. das Produkt von zwei elliptischen Kurven). Die Involution

$$\begin{aligned} \iota : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

hat genau 16 Fixpunkte. Es sei $\sigma : \tilde{A} \rightarrow A$ die Aufblasung in den 16 Fixpunkten. Wir behaupten, daß ι zu einer Involution $\tilde{\iota} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ lifftet, so daß der Quotient

$$S = \text{Km}(A) = \tilde{A}/\tilde{\iota}$$

glatt ist. S heißt dann die zu A gehörige Kummerfläche. Die Behauptung über ι , bzw. $\tilde{\iota}$ ist lokaler Natur. Es genügt, den Ursprung und eine Umgebung U mit lokalen Koordinaten x, y zu betrachten. Die Involution ι operiert durch $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Nun ist \tilde{U} gegeben durch

$$\tilde{U} = \{xY - yX = 0\} \subset U \times \mathbb{P}^1.$$

In einer Umgebung von $\{0\} \times \{(1 : 0)\}$ können wir auf \tilde{U} die Koordinaten $(u, v) = (x, Y/X)$ wählen. Dann ist $y = uv$ und σ ist gegeben durch

$$\sigma : (u, v) \mapsto (u, uv).$$

Die gesuchte Fortsetzung $\tilde{\iota}$ wird dann lokal gegeben durch

$$\tilde{\iota} : (u, v) \mapsto (-u, v).$$

Insbesondere ist der Quotient $\tilde{U}/\tilde{\iota}$ glatt und wir können als lokale Koordinaten u^2, v wählen.

Es bleibt zu zeigen, daß S eine K3-Fläche ist. Es sei $\omega \in H^0(A, K_A)$ eine nirgends verschwindende 2-Form, d.h. bis auf eine Konstante gilt $\omega = dx \wedge dy$. Dann ist

$$\sigma^*\omega = du \wedge d(uv) = udu \wedge dv = \frac{1}{2}du^2 \wedge dv.$$

Dies zeigt, daß $\sigma^*\omega = q^*\tilde{\omega}$ wobei $q : \tilde{A} \rightarrow S$ die natürliche Quotientenabbildung und $\tilde{\omega}$ eine nirgends verschwindende 2-Form auf S ist. Insbesondere ist $K_S = \mathcal{O}_S$: Es bleibt zu zeigen, daß $q(S) = h^0(S, \Omega_S^1) = 0$ ist. Gäbe es eine nicht verschwindende 1-Form τ auf S , so wäre $q^*\tau$ eine $\tilde{\iota}$ -invariante 1-Form auf \tilde{A} . Damit gäbe es eine ι -invariante 1-Form τ' auf A mit $q^*\tau = \sigma^*\tau'$. Da jede 1-Form auf A von der Form $adx + bdy$ ist, kann keine solche Form existieren.

- (v) Es ist schwieriger, Enriquesflächen konkret anzugeben. Es sei zunächst S eine Enriquesfläche. Da $p_g(S) = 0$ ist $K_S \neq \mathcal{O}_S$. Andererseits ist $K_S^{\otimes 2} = \mathcal{O}_S$. Wir können im Totalraum des Geradenbündels K_S eine Fläche definieren durch

$$\tilde{S} = \{s \in K_S, s^2 = 1\}.$$

Die Projektion auf S liefert eine unverzweigte zweiblättrige Überlagerung $q : \tilde{S} \rightarrow S$. Da $K_S \neq \mathcal{O}_S$ ist \tilde{S} irreduzibel. Wir behaupten zunächst, daß \tilde{S} eine K3-Fläche ist. Nach Konstruktion hat $K_{\tilde{S}} = q^*K_S$ einen nirgends verschwindenden Schnitt. Also ist $K_{\tilde{S}} = \mathcal{O}_{\tilde{S}}$, und damit ist $p_g(\tilde{S}) = 1$. Nun gilt offensichtlich $(K_{\tilde{S}})^2 = 2K_S^2$ und $e(\tilde{S}) = 2e(S)$. Nach Noethers Formel gilt also auch $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 2\chi(\mathcal{O}_S) = 2$. Da $p_g(\tilde{S}) = 1$ zeigt dies, daß $q(\tilde{S}) = 0$ ist.

Es sei nun umgekehrt \tilde{S} eine K3-Fläche und $\iota : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ eine fixpunktfreie Involution. Wir behaupten, daß $S = \tilde{S}/\iota$ eine Enriquesfläche ist. Es sei $q : \tilde{S} \rightarrow S$ die Quotientenabbildung. Für jeden Divisor D auf S gilt $q_*q^*D = 2D$. Damit folgt $2K_S = q_*q^*K_S = q_*K_{\tilde{S}} = 0$, also $K_S^{\otimes 2} = \mathcal{O}_S$. Ebenso wie zuvor gilt $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{2}\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 1$. Da $q(\tilde{S}) = h^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^1) = 0$, ist auch $q(S) = 0$. Aus $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ folgt damit $p_g(S) = 0$.

Wir können diese Konstruktion nun benutzen, um konkret Enriquesflächen anzugeben. Wir betrachten dazu einen vollständigen Durchschnitt

$$\tilde{S} = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \subset \mathbb{P}^5.$$

Wir hatten bereits gesehen, daß \tilde{S} eine K3-Fläche ist. Die Koordinaten in \mathbb{P}^5 seien mit x_0, \dots, x_5 bezeichnet. Wir nehmen an, daß die Quadriken Q_j von der Form

$$Q_j = Q'_j(x_0, x_1, x_2) + Q''_j(x_3, x_4, x_5) \quad (j = 1, 2, 3)$$

seien. Auf \mathbb{P}^5 betrachten wir die Involution

$$\iota : \mathbb{P}^5 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \longmapsto (x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4 : -x_5).$$

Wegen der Gestalt der Quadriken Q_j induziert ι eine Involution auf \tilde{S} . Es bleibt zu zeigen, daß ι auf \tilde{S} keine Fixpunkte besitzt. Auf \mathbb{P}^5 besitzt ι zwei Fixebenen, nämlich

$$P_1 = \{x_3 = x_4 = x_5 = 0\}, \quad P_2 = \{x_0 = x_1 = x_2 = 0\}.$$

Wir müssen also nur sicherstellen, daß die Quadriken Q'_j auf P_1 , bzw. die Quadriken Q''_j auf P_2 keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Dies ist für allgemeine Wahl der Q'_j , bzw. Q''_j erfüllt.

Theorem VI.1.2 (Enriques Klassifikation) *Es sei S eine minimale Fläche. Dann gehört S zu einer der folgenden Fälle*

$\kappa(S)$	q, p_g	Typ
$-\infty$	$q = 0$	$\mathbb{P}^2, F_n; n = 0, 2, 3, \dots$
$-\infty$	$q > 0$	geom. Regelfläche über $C, g(C) = q$
0	$q = 0, p_g = 1$	K3-Fläche ($K_S = \mathcal{O}_S$)
0	$q = p_g = 0$	Enriquesfläche ($K_S^{\otimes 2} = \mathcal{O}_S$)
0	$q = 2, p_g = 1$	abelsche Fläche ($K_S = \mathcal{O}_S$)
0	$q = 1, p_g = 0$	bielliptische Fläche ($K_S^{\otimes 12} = \mathcal{O}_S$)
1		minimal elliptisch ($\kappa \neq 0, -\infty$)
2		allgemeiner Typ

6.2 Ein Reduktionsschnitt

Wir zitieren zunächst den

Satz VI.2.1 *Es sei S eine Fläche mit K_S nef, $K_S^2 = 0$, $q = 1$ und $p_g = 0$. Dann ist $\kappa(S) = 0$ oder 1. Der Fall $\kappa(S) = 0$ tritt genau dann ein, wenn S bielliptisch ist.*

Wir werden diesen Satz später beweisen, und zunächst einige Folgerungen hieraus ableiten.

Korollar VI.2.2 *Für eine minimale Fläche S ist K_S genau dann nef, wenn $\kappa(S) \geq 0$. Eine Fläche S ist genau dann eine Regelfläche, wenn $\kappa(S) = -\infty$.*

Beweis. Ist K_S nef, so folgt aus Satz (V.2.3), daß entweder $P_2 > 0$ (und damit $\kappa(S) \geq 0$) oder $K_S^2 = 0$, $q = 1$, $p_g = 0$. Dann ist aber nach Satz (VI.2.1) $\kappa(S) = 1$ oder die Fläche S bielliptisch, und $\kappa(S) = 0$.

Ist umgekehrt S minimal und K_S nicht nef, so ist $\kappa(S) = -\infty$ nach Satz (II.2.11). Dies zeigt den ersten Teil des Satzes.

Für den zweiten Teil können wir annehmen, daß S minimal ist. Dann ist nach Satz (V.2.1) S entweder eine geometrische Regelfläche oder der \mathbb{P}^2 , in jedem Fall also eine Regelfläche. Für Regelflächen gilt $\kappa(S) = -\infty$ nach Satz (III.1.11). \square

Korollar VI.2.3 *Ist S eine minimale rationale Fläche, so ist S entweder isomorph zu \mathbb{P}^2 oder F_n , $n \neq 1$.*

Beweis. Ist S rational, so ist $\kappa(S) = -\infty$ und K_S ist nicht nef. Nach Satz (V.2.1) ist damit S entweder \mathbb{P}^2 oder eine geometrische Regelfläche. Da $q(S) = 0$ ist die Basiskurve rational. Die Behauptung folgt dann aus Korollar (III.1.8). \square

Satz VI.2.4 *Es sei S eine Fläche mit K_S nef und $K_S^2 = 0$. Dann ist $\kappa(S) = 0$ oder 1. Im Fall $\kappa(S) = 1$ besitzt S die Struktur einer elliptischen Faserung.*

Beweis. Wegen Korollar (VI.2.2) ist $\kappa(S) \geq 0$. Es sei nun $\kappa(S) \geq 1$. Dann ist $|nK_S|$ für geeignetes $n > 0$ zumindest 1-dimensional, und wir zerlegen dieses Linearsystem in seinen beweglichen Teil und den Basisdivisor, d.h.

$$|nK_S| = |D| + D_f.$$

Behauptung: $D^2 = K_S.D = 0$

Es gilt nämlich

$$0 = nK_S^2 = K_S.D + K_S.D_f.$$

Da K_S nef ist, folgt $K_S.D = K_S.D_f = 0$. Damit ergibt sich

$$0 = n(D.K_S) = D^2 + D.D_f.$$

Da D beweglich ist, folgt $D^2 = D.D_f = 0$.

Wir betrachten nun die Abbildung $\varphi_{|nK_S|} = \varphi_{|D|}$. Da $D^2 = 0$, ist dies ein Morphismus. Also erhalten wir eine Abbildung $f : S \rightarrow C$, die alle Elemente von $|D|$ kontrahiert. Damit ist C eine Kurve. Wir betrachten eine allgemeine Faser von f , d.h. ein allgemeines, und damit glattes, Element in dem Linearsystem $|D|$. Für jede Zusammenhangskomponente D' gilt, daß $D'^2 = D'.K_S = 0$. Auf Grund der Adjunktionsformel ist D' eine elliptische Kurve. Damit definiert die Steinfaktorisierung von f

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow f' & \nearrow g \\ & & C' \end{array}$$

d.h. die Abbildung $f' : S \rightarrow C'$ die Struktur eines elliptischen Faserraums auf S . Die Kurve C' ist normal, also glatt. \square

Satz VI.2.5 *Es sei S eine Fläche mit K_S nef, $K_S^2 = 0$ und $\kappa(S) = 0$. Dann ist S bielliptisch, abelsch, K3 oder eine Enriquesfläche.*

Beweis. Wegen der Sätze (VI.2.1) und (V.2.3) sind nur zwei Fälle zu betrachten, nämlich $p_g > 0$ (und damit $p_g = 1$ wegen $\kappa(S) = 0$) oder $p_g = q = 0$. Wir betrachten zunächst den zweiten Fall. Wieder nach Satz (V.2.3) ist $P_2 > 0$. Wegen $\kappa(S) = 0$ gilt $P_2 = 1$. Wir behaupten zunächst, daß $P_3 = 0$. Ansonsten wäre $P_3 = 1$ und es gäbe Divisoren $D_2 \in |2K_S|, D_3 \in |3K_S|$. Also $3D_2, 2D_3 \in |6K_S|$. Da $P_6 \leq 1$ würde $2D_2 = 3D_3$ folgen, also gäbe es ein D mit $D_2 = 2D$ und $D_3 = 3D$. Also gilt $D = D_3 - D_2 \in |K_S|$ im Widerspruch zu $p_g = 0$.

Riemann-Roch für $3K_S$ ergibt

$$h^0(3K_S) + h^0(-2K_S) \geq \chi(\mathcal{O}_S) = 1.$$

Da $P_3 = 0$ folgt $h^0(-2K_S) \neq 0$, und da $P_2 = h^0(2K_S) > 0$ ist, ergibt sich $2K_S = 0$. Damit ist S eine Enriquesfläche.

Es sei nun $p_g = 1$. Noethers Formel

$$12\chi(\mathcal{O}_S) = e(S) + K_S^2$$

ergibt

$$12(2 - q(S)) = 2 - 4q(S) + b_2$$

also

$$b_2 = 22 - 8q(S).$$

Also ist $q(S) = 0, 1$ oder 2 .

Ist $q = 0$, liegt eine K3-Fläche vor. Dazu müssen wir noch zeigen, daß K_S trivial ist. Riemann-Roch für $2K_S$ liefert

$$h^0(2K_S) + h^0(-K_S) \geq 2.$$

Wie oben folgt daraus, daß K_S trivial ist.

Es sei nun $q(S) > 0$. Wir zeigen zunächst, daß $q(S) = 1$ nicht möglich ist. Ist $q(S) > 0$, so gibt es ein Geradenbündel $\mathcal{O}_S(\tau)$ mit $\mathcal{O}_S(2\tau) = \mathcal{O}_S$ aber $\mathcal{O}_S(\tau) \neq \mathcal{O}_S$ (man nehme einen nicht-trivialen 2-Teilungspunkt in $\text{Pic}^0(S)$). Ist $q = 1$, so ergibt sich aus Riemann-Roch:

$$h^0(\mathcal{O}_S(\tau)) + h^0(\mathcal{O}_S(K_S - \tau)) \geq 1.$$

Da $\mathcal{O}_S(\tau) \neq \mathcal{O}_S$, ist $h^0(\mathcal{O}_S(\tau)) = 0$, also $h^0(\mathcal{O}_S(K_S - \tau)) \geq 1$. Es gibt also ein Element $D \in |K_S - \tau|$. Da $2\tau = 0$ ist $2D \sim 2K_S$ (wobei mit K_S auch der eindeutig bestimmte Divisor in $|K_S|$ bezeichnet wird). Da $P_2 = 1$ gilt, folgt $D = K_S$ also $\tau = 0$, ein Widerspruch.

Wir wissen also, daß jetzt $q(S) = 2$ gilt und müssen zeigen, daß S dann eine abelsche Fläche ist. Da $p_g = 1$ ist, haben wir eine eindeutige Darstellung

$$K_S = \sum m_j C_j \quad (m_j > 0).$$

Da $K_S^2 = 0$ und K_S nef, ist $K_S.C_j = 0$ für alle Komponenten C_j . Also

$$0 = K_S.C_j = m_j C_j^2 + \sum_{i \neq j} m_i C_i C_j.$$

Wegen der Adjunktionsformel ergeben sich daraus zwei Möglichkeiten: $C_j^2 = -2$ und C_j ist glatt rational oder $C_j^2 = 0$ und $C_i \cdot C_j = 0$ für $i \neq j$. Dann ist C_j eine Zusammenhangskomponente von K_S und $p(C_j) = 1$. D.h. C_j ist glatt elliptisch, oder rational mit einem Doppelpunkt oder einer Spitze.

Wir betrachten nun die Albanese Abbildung $\alpha : S \rightarrow \text{Alb } S$. Nach Satz (IV.2.5) ist α entweder surjektiv, oder das Bild ist eine glatte Kurve C vom Geschlecht $g(C) = q(S) = 2$. Wir betrachten zunächst den zweiten Fall. Wir haben oben gesehen, daß alle Komponenten von K_S elliptische oder rationale Kurven sind. Da das Geschlecht von C jedoch zwei ist, werden die Kurven C_j durch α kontrahiert. An dieser Stelle benötigen wir

Lemma VI.2.6 (Zariski) *Es sei $f : S \rightarrow C$ eine Faserung. Es sei $F = \sum m_i C_i$ eine Faser. Die C_i seien irreduzible Kurven. Dann gilt für jeden \mathbb{Q} -Divisor $D = \sum r_i C_i$, daß $D^2 \leq 0$. Es gilt $D^2 = 0$ genau dann, wenn $D = rF$ für ein $r \in \mathbb{Q}$.*

Beweis. Es sei $F_i = m_i C_i$, also $F = \sum F_i$. Mit $s_i = r_i/m_i$ gilt dann $D = \sum s_i F_i$. Also ist

$$\begin{aligned} D^2 &= \sum_i s_i^2 F_i^2 + 2 \sum_{i < j} s_i s_j F_i F_j \\ &= \sum_i s_i^2 F_i F - \sum_{i < j} (s_i^2 + s_j^2 - 2s_i s_j) F_i F_j \\ &= 0 - \sum_{i < j} (s_i - s_j)^2 F_i F_j \leq 0 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt, da die Faser zusammenhängend ist, nur falls $s_i = s_j = r$ für alle i, j , also für $D = \sum r F_i = rF$. \square

Nach Satz (IV.2.5) hat $\alpha : S \rightarrow C$ zusammenhängende Fasern, ist also eine Faserung. Nun gilt für jede Zusammenhangskomponente D von K_S nach obigem, daß $D^2 \leq 0$. Da $K_S^2 = 0$, ist stets $D^2 = 0$, also folgt nach Lemma (VI.2.6), daß $D = rF$ für ein $r \in \mathbb{Q}$. Insgesamt ergibt sich, daß $K_S = sF$ für ein $s = a/b \in \mathbb{Q}$. Also ist $bK_S = aF$. Ist $a \neq 0$, so geht $h^0(nbK_S) = h^0(naF)$ gegen unendlich für n groß. Also folgt $a = 0$, d.h. $K_S = 0$. Wir betrachten nun eine unverzweigte Überlagerung $C' \rightarrow C$. Diese induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\pi} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ C' & \longrightarrow & C \end{array}$$

wobei $S' \rightarrow S$ ebenfalls unverzweigt ist. Es ist $K_{S'} = \pi^* K_S = \mathcal{O}_{S'}$ und $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = (\deg \pi) \chi(\mathcal{O}_S) = 0$. (Das zweite Gleichheitszeichen folgt aus der Formel von Noether). Also ergibt sich $g(S') = 2$. Andererseits ist $g(S') \geq g(C') > 2$ ein Widerspruch.

Es sei nun $\alpha : S \rightarrow \text{Alb } S$ surjektiv. Die Abbildung $\alpha^* : H^2(\text{Alb } S, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{C})$ ist injektiv. Da

$$b_2(S) = 22 - 8g(S) = 6 = b_2(\text{Alb } (S))$$

ist dies ein Isomorphismus. Es kann daher keine Kurven auf S geben, die unter α auf einen Punkt kontrahiert werden. Insbesondere besteht K_S höchstens aus disjunkten elliptischen Kurven. Es sei E eine Zusammenhangskomponente. Dann sind E und $E' = \alpha(E)$ elliptische Kurven. Wir haben einen surjektiven Morphismus

$$\beta : S \xrightarrow{\alpha} \text{Alb } S \rightarrow \text{Alb } S/E' = E''$$

auf eine elliptische Kurve E'' . Es sei $f : S \rightarrow C$ die Steinfaktorisierung von β . Dann ist $E = rF$ wobei F die Faser von f ist. Daraus folgt, daß $h^0(nK_S) \rightarrow \infty$ für $n \gg 0$ im Widerspruch zu $\kappa(S) = 0$. Also ist $K_S = 0$. Es genügt nun zu zeigen, daß α unverzweigt ist, da jede unverzweigte Überlagerung eines Torus wieder ein Torus ist. Es sei $\omega = dx \wedge dy$ eine 2-Form auf $\text{Alb } S$. Diese verschwindet nirgends. Dann ist $\alpha^*\omega \in H^0(S, K_S)$. Da K_S trivial ist, hat auch $\alpha^*\omega$ nirgends Nullstellen. Also ist α unverzweigt. \square

6.3 Ende des Beweises

Im folgenden betrachten wir stets Faserungen $f : S \rightarrow C$. Ist F eine Faser, so können wir $F = \sum m_i F_i$ mit irreduziblen Kurven F_i schreiben.

Definition: Die *Multiplizität* der Faser F ist der größte gemeinsame Teiler m der Zahlen m_i .

Für eine multiple Faser können wir also stets $F = mF'$ schreiben.

Lemma VI.3.1 *Es sei $f : S \rightarrow C$ eine Faserung. Es sei $\delta \subset C$ die endliche Menge der Punkte, über denen f nicht glatt ist. Schließlich sei F eine glatte Faser. Dann gilt:*

$$(3) \quad e(S) = e(C) \cdot e(F) + \sum_{b \in \delta} (e(F_b) - e(F)).$$

Beweis. Über $U = C - \delta$ ist f ein topologisches Bündel, und es gilt

$$e(f^{-1}(U)) = e(U) \cdot e(F).$$

Der Rest folgt durch geeignetes Triangulieren. \square

Lemma VI.3.2 *Es sei $C = \sum C_i$ eine reduzierte Kurve. Dann gilt $e(C) \geq 2\chi(\mathcal{O}_C)$ und Gleichheit gilt genau dann wenn C glatt ist.*

Beweis. Wir betrachten die Normalisierung $\nu : \tilde{C} \rightarrow C$ von C . Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_C & \longrightarrow & \nu_* \mathbb{C}_{\tilde{C}} & \longrightarrow & \delta \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} & \longrightarrow & \Delta \longrightarrow 0. \end{array}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e(\tilde{C}) &= e(C) + h^0(\delta) \\ \chi(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) &= \chi(\mathcal{O}_C) + h^0(\Delta). \end{aligned}$$

Da \tilde{C} glatt ist, gilt $e(\tilde{C}) = 2\chi(\mathcal{O}_{\tilde{C}})$. Dies ergibt

$$e(C) = 2\chi(\mathcal{O}_C) + 2h^0(\Delta) - h^0(\delta).$$

Die Abbildung i ist injektiv. Also gilt $h^0(\delta) \leq h^0(\Delta)$. Dies zeigt, daß $e(C) \geq 2\chi(\mathcal{O}_C)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $h^0(\Delta) = 0$, d.h. wenn C glatt ist. \square

Satz VI.3.3 *Es sei S eine Fläche mit K_S nef und $p_g = 0$, $q = 1$ und $K_S^2 = 0$. Weiter sei $\alpha : S \rightarrow D$ die Albaneseabbildung und g das Geschlecht der allgemeinen Faser von α . Dann ist $g \geq 1$. Ist $g \geq 2$, so ist α glatt. Ist $g = 1$, so sind die singulären Fasern von α alle von der Form $F_b = nE$ wobei E eine elliptische Kurve ist.*

Beweis. Zunächst folgt aus Noethers Formel, daß $K^2 = 10 - 8q - b_2$, d.h. $b_2 = 2$. Dies hat zur Folge, daß alle Fasern von α irreduzibel sind: Es seien nämlich F_1, F_2 zwei verschiedene irreduzible Kurven, die in einer Faser enthalten sind. Da $b_2 = 2$ sind F_1, F_2 und H (hier ist H ein ample Divisor) in $H^2(S, \mathbb{Z})$ abhängig, d.h. es gibt eine nicht triviale Relation

$$\alpha H + \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 = 0.$$

Ist $\alpha \neq 0$ so folgt hieraus, daß $H \cdot F = 0$ ist, ein Widerspruch. Also ist $\alpha = 0$, d.h. wir können annehmen, daß $F_1 = rF_2$ mit $r \in \mathbb{Q}$. Aus Zariski's Lemma folgt $F_i^2 < 0$ für $i = 1, 2$. Schneidet man $F_1 = rF_2$ mit F_1 folgt $r \leq 0$, während der Schnitt mit H umgekehrt $r > 0$ gibt, ein Widerspruch.

Es sei nun $F_b = nC$ eine multiple Faser. Dann gilt

$$e(F_b) = e(C) \geq 2\chi(\mathcal{O}_C)$$

sowie mit Hilfe der Adjunktionsformel

$$\begin{aligned} 2\chi(\mathcal{O}_C) &= -C^2 - CK_S = -\frac{1}{n}F_b K_S \\ &= -\frac{1}{n}FK_S = \frac{2}{n}\chi(\mathcal{O}_F) \\ &= \frac{1}{n}e(F) \end{aligned}$$

wobei F die allgemeine Faser bezeichnet. Da K_S nef ist, ist $g \geq 1$ und $e(F) \leq 0$. Also folgt $e(F_b) \geq e(F)$. Gleichheit gilt nur, wenn sowohl $e(C) = 2\chi(\mathcal{O}_C)$, d.h. C glatt ist und zugleich $\frac{1}{n}e(F) = e(F)$, d.h. entweder $n = 1$ oder $e(F) = 0$, d.h. $g = 1$. In letzterem Fall ist auch $g(C) = 1$.

Aus Formel (3) von Lemma (VI.3.1) folgt, da D elliptisch ist, daß

$$e(S) = \sum_{b \in \delta} (e(F_b) - e(F)).$$

Andererseits wissen wir, daß $e(S) = 2 - 4q + b_2 = 0$. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma VI.3.4 *Es sei $f : S \rightarrow C$ eine Faserung. Es sei F_b eine singuläre Faser der Form $F_b = nF'$ mit F' irreduzibel, glatt. Dann ist die Ordnung von $\mathcal{O}_{F'}(F')$ in $\text{Pic } F'$ gleich n .*

Beweis. Da $\mathcal{O}_S(nF') = \mathcal{O}_S(F)$ und $\mathcal{O}_{F'}(F) = \mathcal{O}_{F'}$, ist die Ordnung von $\mathcal{O}_{F'}(F')$ höchstens gleich n .

Wir ersetzen nun C durch eine Scheibe Δ um b und S durch $X = f^{-1}(\Delta)$. Es genügt zu zeigen, daß die Ordnung von $\mathcal{O}_{F'}(F')$ in der analytischen Kategorie mindestens n ist. Zunächst stellen wir fest, daß $\mathcal{O}_X(F')$ die Ordnung n hat. Es sei nämlich $m \leq n$ die Ordnung von $\mathcal{O}_X(F')$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion g , die auf F' von Ordnung m verschwindet. Da f zusammenhängende Fasern hat, ist g von der Form $g = f^*h$, wobei

h eine holomorphe Funktion auf Δ ist. Da lokal f durch $f(x, y) = y^n$ gegeben ist, ist dies für $m < n$ unmöglich.

Um die Aussage auch für $\mathcal{O}_{F'}(F')$ zu beweisen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \text{rest} \downarrow & & \downarrow \text{rest} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{F'} & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{O}_{F'}^* \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 1 \end{array}$$

Nach eventuellem Verkleinern von Δ können wir annehmen, daß die natürlichen Abbildungen $H^i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(F', \mathbb{Z}), i = 1, 2$ Isomorphismen sind. Damit erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(F', \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{F'}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{F'}^*) \longrightarrow H^2(F', \mathbb{Z}) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \mathbb{Z}^N \end{array}$$

Da $\mathcal{O}_X(F')$ in $H^1(\mathcal{O}_X^*)$ Ordnung n hat, und da $H^2(X, \mathbb{Z})$ torsionsfrei ist, besitzt $\mathcal{O}_X(F')$ ein Urbild ξ in $H^1(\mathcal{O}_X)$. Ist m die Ordnung von $\mathcal{O}_{F'}(F')$ in $H^1(\mathcal{O}_{F'}^*)$ so gilt $m|n$. Es gibt eine Klasse $c \in H^1(X, \mathbb{Z})$, die auf $m(\xi|_{F'})$ abgebildet wird. Also haben $\frac{n}{m}c$ und $n\xi$ dasselbe Bild in $H^1(\mathcal{O}_{F'})$, nämlich $n\xi|_{F'}$. Da die Abbildung $H^1(F', \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{F'})$ injektiv ist, folgt, daß das Bild von c in $H^1(\mathcal{O}_X)$ mit $m\xi$ übereinstimmt. Also ist $\mathcal{O}_X(F')^{\otimes m}$ trivial, und daraus folgt, daß $m = n$. \square

Satz VI.3.5 *Es sei $f : S \rightarrow C$ eine elliptische Faserung, deren singuläre Fasern von der Form $F_i = m_i F'_i$ mit F'_i glatt, elliptisch sind. Dann gilt:*

$$K_S = f^*L + \sum_i (m_i - 1)F'_i$$

wobei L ein Divisor auf C mit $\deg L = \chi(\mathcal{O}_S) - 2\chi(\mathcal{O}_C)$ ist.

Beweis. Wir gehen in zwei Schritten vor.

Behauptung 1: $K_S = f^*L + \sum_i (m_i - 1)F'_i$ für einen Divisor L auf C .

Wir betrachten hierzu N glatte Fasern G_1, \dots, G_N , sowie die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(\sum_j G_j) \rightarrow \bigoplus_j \mathcal{O}_{G_j}(G_j) \rightarrow 0.$$

Tensorieren mit K_S gibt zusammen mit der Adjunktionsformel $\mathcal{O}_{G_j}(K_S + G_j) = \mathcal{O}(K_{G_j}) = \mathcal{O}_{G_j}$ die Sequenz

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(K_S) \rightarrow \mathcal{O}_S(K_S + \sum_j G_j) \rightarrow \bigoplus_j \mathcal{O}_{G_j} \rightarrow 0.$$

Die lange Kohomologiesequenz von (4) liefert

$$h^0(K_S + \sum_j G_j) \geq p_g + N - q.$$

Insbesondere gibt es einen effektiven Divisor $D \in |K_S + \sum G_j|$ für N hinreichend groß. Nun ist $F.K_S = F.G_j = 0$, also auch $F.D = 0$. Dies zeigt, daß $D = \sum d_i D_i$ wobei alle D_i Komponenten von Fasern sind. Wir können also schreiben

$$D = f^*L' + \sum_i n_i F'_i, \quad 0 \leq n_i \leq m_i - 1.$$

D.h. daß

$$K_S = f^*L + \sum_i n_i F'_i.$$

Nun ist wegen der Adjunktionsformel

$$\mathcal{O}_{F'_i} = \mathcal{O}_{F'_i}(K_S + F'_i) = \mathcal{O}_{F'_i}((n_i + 1)F'_i).$$

Damit folgt aus Lemma (VI.3.4), daß $n_i + 1 = m_i$, d.h. $n_i = m_i - 1$.

Behauptung 2: $\deg L = \chi(\mathcal{O}_S) - 2\chi(\mathcal{O}_C)$.

Wir berechnen dazu $h^0(K_S + \sum G_j)$ auf zwei verschiedene Weisen. Zunächst stellen wir fest, daß $\sum(m_i - 1)F'_i$ im Fixteil von $|K_S + \sum G_j|$ liegt. Also gilt

$$h^0(K_S + \sum G_j) = h^0(\mathcal{O}_S(f^*L + \sum G_j)) = h^0(\mathcal{O}_C(L + \sum c_j))$$

wobei $c_j = f(G_j)$ und Korollar (IV.1.3) verwendet wurde. Nach Riemann-Roch ist also

$$(5) \quad h^0(K_S + \sum G_j) = \deg L + N + 1 - g(C)$$

falls N genügend groß ist. Auf der anderen Seite hatten wir beim Beweis von Behauptung 1 gesehen, daß

$$(6) \quad h^0(K_S + \sum G_j) = \chi(\mathcal{O}_S) + N - 1 + l$$

wobei

$$l = \dim \operatorname{im} (H^1(\mathcal{O}_S(K_S)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S(K_S + \sum G_j))).$$

Mittels Serre-Dualität ist dies

$$l = \dim \operatorname{im} (H^1(\mathcal{O}_S(-\sum G_j)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S)).$$

Mit Hilfe der Standardsequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-\sum G_j) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \oplus \mathcal{O}_{G_j} \rightarrow 0$$

ergibt sich

$$l = \dim \ker (H^1(\mathcal{O}_S) \rightarrow \oplus H^1(\mathcal{O}_{G_j})).$$

Unter Verwendung der Hodgezerlegung, bzw. von $H^1(\mathcal{O}_S) = H^0(\Omega_S^1)$ wird dies zu

$$l = \dim \ker (H^0(\Omega_S^1) \rightarrow \oplus H^0(\Omega_{G_j}^1))$$

Aus der exakten Sequenz

$$f^*\Omega_C^1 \rightarrow \Omega_S^1 \rightarrow \Omega_{S/C}^1 \rightarrow 0$$

folgt, daß für $N \gg 0$ der relevante Kern gerade $f^*H^0(\Omega_C^1)$ ist. Also gilt:

$$(7) \quad l = \dim H^0(\Omega_C^1) = g(C).$$

Aus (5), (6) und (7) folgt

$$\deg L = \chi(\mathcal{O}_S) + 2g(C) - 2 = \chi(\mathcal{O}_S) - 2\chi(\mathcal{O}_C).$$

□

Bemerkungen:

- (i) Obige Formel gilt für alle elliptischen Faserungen (kanonische Bündelformel).
- (ii) Ist $f : S \rightarrow C$ eine elliptische Faserung, so können folgende Fasern als multiple Fasern auftreten: elliptische Kurven, rationale Kurven mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt und Zykel rationaler (-2)-Kurven.

Definition: Eine Faserung $f : X \rightarrow Y$ zwischen projektiven Mannigfaltigkeiten heißt *isotrivial*, falls es eine unverzweigte Überlagerung $g : Y' \rightarrow Y$ gibt, so daß das Pullback $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ trivial ist, d.h. es gibt eine projektive Mannigfaltigkeit F , so daß $X' = Y' \times F$ und f' die Projektion auf Y' ist.

Satz VI.3.6 *Es sei $f : S \rightarrow C$ eine glatte Faserung einer Fläche über einer Kurve von Geschlecht 0 oder 1. Die allgemeine Faser habe Geschlecht $g \geq 1$. Dann ist f isotrivial.*

Beweis. Nach dem Theorem von Ehresmann ist die Faserung $f : S \rightarrow C$ differenzierbar lokal trivial. D.h. daß die Garbe

$$R^1 f_* \mathbb{Z} = \bigcup_{c \in C} H^1(F_c, \mathbb{Z})$$

eine lokal konstante Garbe von freien Moduln vom Rang $2g$ ist, wobei g das Fasergeschlecht ist.

Weiterhin ist $f_* \mathcal{O}_S(K_S)$ lokal frei von Rang g . Dies folgt aus dem Grauert'schen Basiswechselsatz. Es gilt

$$f_* \mathcal{O}_S(K_S) / m_c f_* \mathcal{O}_S(K_S) \cong H^0(F_c, \omega_{F_c}).$$

Wir wählen nun eine offene Menge $U \subset C$, so daß $R^1 f_* \mathbb{Z}$ und $f_* \mathcal{O}_S(K_S)$ über U trivial sind. D.h. wir können eine Basis

$$\omega_1(c), \dots, \omega_g(c) \in H^0(F_c, \omega_{F_c})$$

wählen, die holomorph vom Basispunkt c abhängt. Ferner können wir eine normalisierte Basis $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g} \in H_1(F_c, \mathbb{Z})$ wählen, so daß bei geeigneter Wahl der Basis $\omega_1(c), \dots, \omega_g(c)$ für die Periodenmatrix gilt:

$$\Omega(c) = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1(c) & \dots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1(c) \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g(c) & \dots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \tau_{11}(c) & \dots & \tau_{1g}(c) \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \tau_{g1}(c) & \dots & \tau_{gg}(c) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\tau(c) = (\tau_{ij}(c))$ im Siegelraum S_g der Stufe g , d.h.

$$S_g = \{\tau \in M(g \times g, \mathbb{C}); \tau = {}^t \tau, \operatorname{Im} \tau > 0\}.$$

Die Periodenmatrix $\tau(c)$ liegt fest bis auf Basiswechsel, d.h. bis auf Operation der Gruppe

$$Sp(2g, \mathbb{Z}) = \left\{ M \in GL(2g, \mathbb{Z}); \quad M \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_g \\ -\mathbf{1}_g & 0 \end{pmatrix} {}^t M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_g \\ -\mathbf{1}_g & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dabei operiert die Gruppe $Sp(2g, \mathbb{Z})$ wie folgt auf S_g : Ist $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbb{Z})$ mit $(g \times g)$ -Blocks A, \dots, D , so ist

$$M\tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}.$$

Wir erhalten lokal eine Abbildung

$$\pi : U \rightarrow S_g$$

die *lokale Periodenabbildung*. Im allgemeinen läßt sich π nicht zu einer Abbildung auf ganz C fortsetzen. Vielmehr liefert dies eine mehrwertige Abbildung von C nach S_g . Die Mehrdeutigkeit ist durch die Monodromieoperation von $\pi_1(C)$ auf $H_1(F_c, \mathbb{Z})$ gegeben. Wir können jedoch zur universellen Überlagerung \tilde{C} von C der Basiskurve übergehen, und erhalten dann die *Periodenabbildung*

$$\tilde{\pi} : \tilde{C} \rightarrow S_g.$$

Ist $C = \mathbb{P}^1$, bzw. eine elliptische Kurve, so ist auch $\tilde{C} = \mathbb{P}^1$, bzw. $\tilde{C} = \mathbb{C}$. Da S_g ein beschränktes Gebiet ist, ist $\tilde{\pi}$ konstant. Nach dem Satz von Torelli sind dann alle Fasern isomorph. Dies wiederum bedeutet nach einem Satz von Grauert-Fischer, daß $f : S \rightarrow C$ ein lokaltriviales Bündel mit einer Faser F und Strukturgruppe $G \subset \operatorname{Aut} F$ ist. Ist $g(F) \geq 2$, so ist G endlich. Die Monodromie liefert einen Homomorphismus $\pi_1(C) \rightarrow G$. Es sei G' das Bild von $\pi_1(C)$. Der Kern der Abbildung $\pi_1(C) \rightarrow G'$ ist eine normale Untergruppe von $\pi_1(C)$ von endlichem Index. Dies entspricht einer endlichen, unverzweigten galoischen Überlagerung $\tilde{C} \rightarrow C$. Die Monodromieoperation von $\pi_1(\tilde{C})$ für die Faserung $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ ist nach Konstruktion trivial. Also ist diese Faserung trivial. Es sei nun $g = 1$. Wir betrachten $R^1 f_*(\mathbb{Z}_n)$. Dies ist eine lokal konstante Garbe mit Faser $H^1(F_c, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Die Schnittform liefert eine nicht-ausgeartete Form

$$R^1 f_* \mathbb{Z}_n \times R^1 f_* \mathbb{Z}_n \rightarrow (\mathbb{Z}_n)_C.$$

Also erhalten wir

$$\pi_1(C) \rightarrow \operatorname{Aut} (H_1(F_c, \mathbb{Z}_n)) = Sp(2, \mathbb{Z}_n).$$

Das Bild von $\pi_1(C)$ ist endlich. Nach eventueller endlicher Überlagerung können wir annehmen, daß es trivial ist. Ist $n \geq 3$, so ist jeder Automorphismus von F , der auf $H_1(F_c, \mathbb{Z}_n)$ die Identität induziert bereits die Identität. Es folgt, daß $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ trivial ist. \square

Wir können nun die Flächenklassifikation abschließen.

Beweis von Satz (VI.2.1). Es sei S eine minimale Fläche mit K_S nef, $K_S^2 = 0$, $q = 1$ und $p_g = 0$. Wir betrachten die Albanese Abbildung $\alpha : S \rightarrow C$ wobei C eine elliptische Kurve ist. Es sei g das Fasergeschlecht. Nach Satz (VI.3.3) ist entweder $g \geq 2$ oder $g = 1$ und die einzigen singulären Fasern sind von der Form nE mit E glatt, elliptisch.

Wir betrachten zunächst den Fall $g \geq 2$. Dann ist nach Satz (VI.3.6) die Faserung $\alpha : S \rightarrow C$ isotrivial. Also gibt es eine unverzweigte Überlagerung $\tilde{S} \rightarrow S$ mit $\tilde{S} = C \times F$. Wegen Satz (VI.3.6) gilt $\kappa(S) = \kappa(\tilde{S}) = 1$.

Es sei nun $g = 1$. Falls singuläre Fasern vorliegen, so folgt sofort aus der kanonischen Bündelformel, d.h. Satz (VI.3.5), daß

$$K_S = f^*L + \sum (m_i - 1)F'_i, \quad L \geq 0$$

wobei $\deg L = \chi(\mathcal{O}_S) - 2\chi(\mathcal{O}_C)$. Da $b_2(S) = 2$ gilt $e(S) = 2 - 4q + b_2 = 0$, und wegen $K_S^2 = 0$ auch $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$. Da C elliptisch ist, ist auch $\chi(\mathcal{O}_C) = 0$, d.h. $\deg L = 0$. Dann folgt sofort, daß $\kappa(S) = 1$, da geeignete Vielfache von K_S von der Form f^*M mit $\deg M > 0$ sind. Liegen keine singulären Fasern vor, so ist $f : S \rightarrow C$ nach Satz (VI.3.6) wiederum isotrivial. Dem Beweis entnimmt man, daß es eine endliche Untergruppe $G \subset C$ gibt, mit $S = C \times F/G$. Da $p_g(S) = 0$, ist S bielliptisch. \square

6.4 Plurikanonische Systeme

Es sei S eine Fläche von allgemeinem Typ. Wir betrachten die plurikanonischen Abbildungen

$$\varphi_m = \varphi_{|mK_S|} : S \dashrightarrow \mathbb{P}^N \quad (N = h^0(mK_S) - 1).$$

Satz VI.4.1 (Bombieri) *Es sei S eine minimale Fläche von allgemeinem Typ. Dann gilt*

- (i) *Ist $m \geq 4$, so hat φ_m keine Basispunkte.*
- (ii) *Ist $m \geq 5$, so ist φ_m außerhalb der rationalen (-2) -Kurven eine Einbettung.*

Bemerkungen:

- (i) Es können (-2) -Kurven existieren.
- (ii) φ_m bildet die rationalen (-2) -Kurven auf rationale Doppelpunkte ab. Man erhält dadurch das "kanonische Modell" von S .

Den Satz von Bombieri kann man heute leicht mit Hilfe von Reiders Theorem beweisen.

Theorem VI.4.2 (Reider) *Es sei S eine Fläche. Das Geradenbündel L sei nef. Dann gilt:*

- (i) *Es sei $L^2 \geq 5$. Ist $P \in S$ ein Basispunkt von $|K_S + L|$, so existiert ein effektiver Divisor D durch P mit*
 - (a) $D.L = 0$, $D^2 = -1$ oder
 - (b) $D.L = 1$, $D^2 = 0$.

(ii) Es sei $L^2 \geq 10$. Sind $P, Q \in S$ zwei Punkte (möglicherweise unendlich nahe), die durch $|K_S + L|$ nicht getrennt werden, so gibt es einen Divisor D durch P und Q mit:

(a) $D.L = 0$, $D^2 = -2$ oder -1 , oder

(b) $D.L = 1$, $D^2 = -1$ oder 0 , oder

(c) $D.L = 2$, $D^2 = 0$.

Beweis von Satz (VI.4.1)(ii) Wir wollen das Theorem von Reider auf das Geradenbündel $L = (m-1)K_S$ anwenden. Da K_S nef ist, ist auch L nef. Da $K_S^2 > 0$ ist, gilt

$$L^2 = (m-1)^2 K_S^2 \geq 10.$$

Es sei φ_m keine Einbettung. Dann gibt es einen effektiven Divisor D mit

$$D.L = (m-1)K_S.D = 0, \quad D^2 = -1 \text{ oder } -2, \text{ oder}$$

$$D.L = (m-1)K_S.D = 1, \quad D^2 = -1 \text{ oder } 0, \text{ oder}$$

$$D.L = (m-1)K_S.D = 2, \quad D^2 = 0.$$

Da $(m-1) \geq 4$ gibt es nur die Möglichkeit, daß

$$K_S.D = 0, \quad D^2 = -1 \text{ oder } -2.$$

Die Adjunktionsformel lautet

$$2p(D) - 2 = D.(D + K_S).$$

Also folgt

$$K_S.D = 0, \quad D^2 = -2.$$

Es sei $D = \sum m_i D_i$. Da K_S nef ist, folgt $K_S.D_i = 0$. Ferner folgt aus $K_S^2 > 0$ und $K_S.D_i = 0$ mit Hilfe des Hodge Indexsatzes, daß $D_i^2 < 0$. Wegen

$$2p_a(D_i) - 2 = D_i.(D_i + K_S) = D_i^2 < 0$$

folgt $p_a(D_i) = 0$, $D_i^2 = -2$. D.h. D_i ist glatte, rationale (-2) -Kurve. □

6.5 Flächengeographie

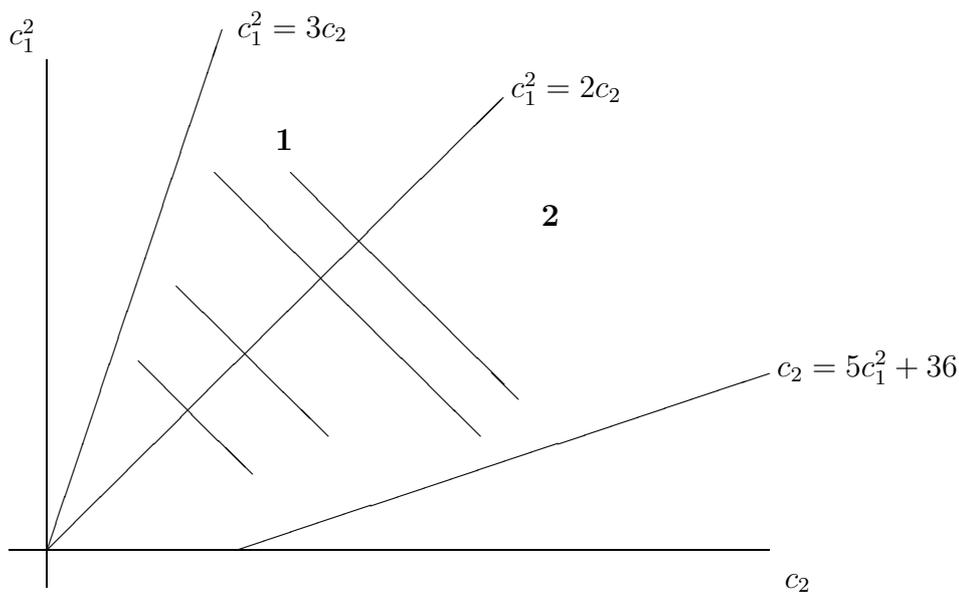
Um einen Überblick über die Flächen von allgemeinem Typ zu erhalten, kann man die folgende Frage stellen: Für welche Werte für $(c_1^2, c_2) = (K^2, e(S))$ gibt es Flächen von allgemeinem Typ? Man hat folgende Bedingungen

(1) $c_1^2 + c_2 \equiv 0 \pmod{12}$ (aus Noethers Formel)

(2) $c_1^2 > 0$, $c_2 > 0$

(3) $5c_1^2 - c_2 + 36 \geq 0$ (im wesentlichen klassisch, Noether)

(4) $c_1^2 \leq 3c_2$ (Miyaoaka).



Die Flächen, die zu Punkten im Bereich 1 gehören, sind relativ schwierig zu konstruieren. Für die meisten Paare (c_1^2, c_2) in dem angegebenen Bereich sind Flächen konstruiert worden.

Literatur

- [1] W.Barth, C. Peters, A. Van de Ven: Compact Complex Surfaces. Springer Verlag (1984).
- [2] A. Beauville: Complex Algebraic Surfaces. Cambridge University Press (1983).
- [3] R. Hartshorne: Algebraic Geometry. Springer Verlag (1977).
- [4] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki: Introduction to the Minimal Model Problem. Advanced Studies in Pure Mathematics **10**, 283-360 (1987).
- [5] C. Peters: Introduction to the Theory of Compact Complex Surfaces. Leiden (1990)
- [6] M. Schneider: Klassifikation der algebraischen Flächen. (Ausarbeitung: G. Edelmann). Bayreuth (1989)
- [7] A. Van de Ven: Manuskript. Bayreuther Frühjahrsschule (1991)
- [8] P.H.M. Wilson: Towards Birational Geometry of Algebraic Varieties. Bull. Lond. Mac. Soc. **19**, 1-48 (1987)

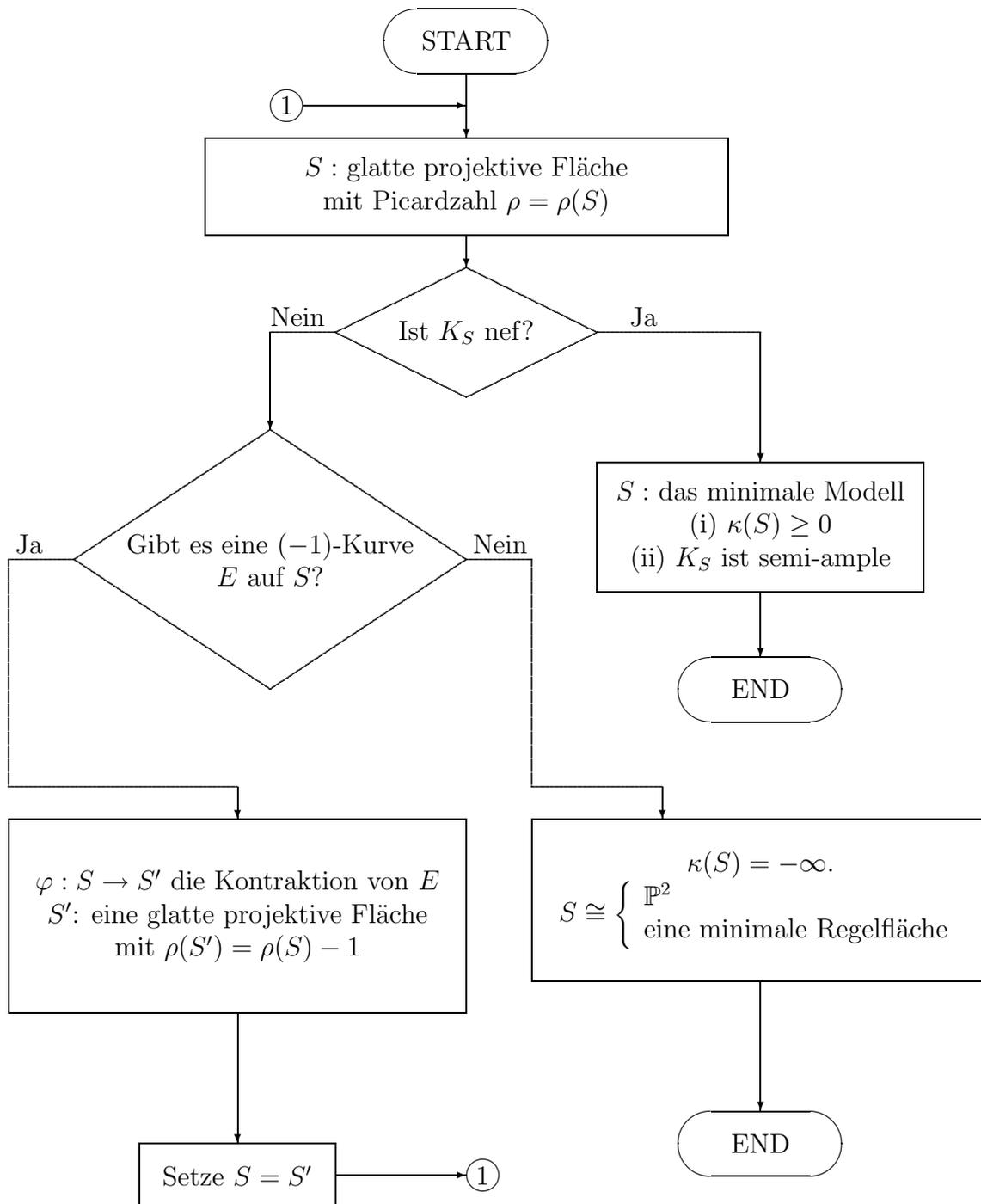


Abbildung 1: Flächenklassifikation im Mori-Programm ([4, p. 285])