10 Das Riemannsche Integral

Ziel dieses Paragraphen ist es, den Inhalt einer Fläche, die vom Graphen einer Funktion berandet wird, exakt zu definieren.

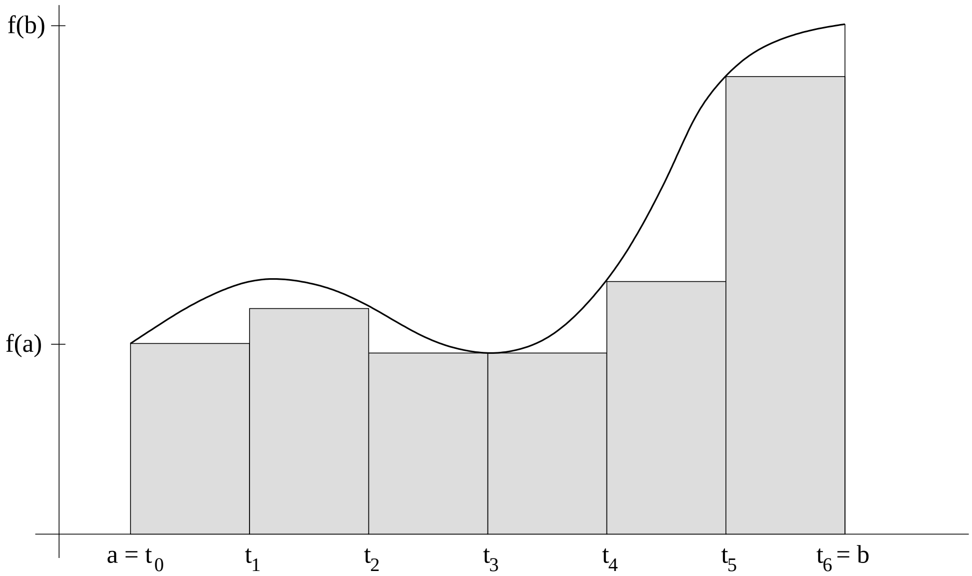

Abbildung 11: Graph einer Funktion mit Untersumme

Wir approximieren diesen Flächeninhalt, indem wir zunächst das Intervall $[a, b]$ unterteilen:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

In diesem Fall spricht man von einer *Zerlegung* der *Länge* n in die *Teilintervalle*

$$I_i = [t_{i-1}, t_i]\,;\; i = 1, \ldots, n.$$

Für jedes dieser Teilintervalle definieren wir

$$m_i := \inf\left\{f(x)|t_{i-1} \leq x \leq t_i\right\},$$

$$M_i := \sup\left\{f(x)|t_{i-1} \leq x \leq t_i\right\}.$$

Falls die Funktion f beschränkt ist, dann existieren diese Zahlen für jede Unterteilung des Intervalls $I = [a, b]$.

Definition Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von I, d.h. $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$. Die Zahlen $m_i, M_i; i = 1, \ldots, n$ seien wie oben definiert.

(i) Die *Untersumme* von f bezüglich der Zerlegung P ist definiert durch

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

(ii) Die *Obersumme* von f bezüglich der Zerlegung P ist definiert durch

$$O(f,P) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass stets gilt

$$U(f,P) \leq O(f,P).$$

Wir vergleichen nun, was passiert, wenn wir verschiedene Zerlegungen betrachten.

Definition Wir sagen, dass eine Zerlegung $Q = \{t'_0, \dots, t'_m\}$ eine *Verfeinerung* der Zerlegung $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ ist, falls $P \subset Q$ gilt.

Satz 10.1 *Es sei Q eine Verfeinerung von P. Dann gilt*

$$U(f,P) \leq U(f,Q) \leq O(f,Q) \leq O(f,P).$$

Beweis. Wir haben bereits bewiesen, dass die zweite Ungleichung gilt. Wir werden hier die erste Ungleichung zeigen, die dritte geht analog. Ferner genügt es, die Situation zu betrachten, wo

$$P = \{t_0, \dots, t_n\}, \; Q = \{t_0, \dots, t_{k-1}, u, t_k, \dots, t_n\}$$

mit

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < u < t_k < \cdots < t_n = b.$$

Es sei

$$m' := \inf \{f(x)|\; t_{k-1} \leq x \leq u\}$$
$$m'' := \inf \{f(x)|\; u \leq x \leq t_k\}.$$

Es gilt dann

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

$$U(f,Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Vergleichen wir die beiden Summen, so sehen wir, dass wir die folgende Ungleichung beweisen müssen:

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Nun gilt nach Definition der Größen m_k, m' und m'':

$$m_k \leq m', \; m_k \leq m''.$$

Damit gilt

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

□

Satz 10.2 *Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt für zwei beliebige Zerlegungen P_1 und P_2 von I, dass*

$$U(f, P_1) \leq O(f, P_2).$$

Beweis. Es sei $P = P_1 \cup P_2$ die *gemeinsame Verfeinerung* von P_1 und P_2. Dann gilt nach Satz 10.1

$$U(f, P_1) \leq U(f, P) \leq O(f, P) \leq O(f, P_2).$$

□

Wir betrachten nun die Mengen

$$U := \{U(f, P) |\; P \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\},$$

$$O := \{O(f, P) |\; P \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}.$$

Nach Satz 10.2 ist die Menge U nach oben und die Menge O nach unten beschränkt. Daher besitzt U ein Supremum und O ein Infimum.

Definition Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(i) Das *Unterintegral* von f auf dem Intervall I ist definiert durch

$$U \int\limits_a^b f(x)dx = \sup \{U(f, P) | P \text{ ist Zerlegung von } f\}.$$

(ii) Das *Oberintegral* von f auf dem Intervall I ist definiert durch

$$O \int\limits_a^b f(x)dx = \inf \{O(f, P) | P \text{ ist Zerlegung von } f\}.$$

Aus Satz 10.2 folgt sofort, dass

$$U \int_a^b f(x)dx \leq O \int_a^b f(x)dx.$$

Definition Eine beschränkte Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall I *(Riemann) integrierbar*, falls gilt:

$$U \int_a^b f(x)dx = O \int_a^b f(x)dx.$$

Schreibweise: Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_I f(x)dx := U \int_a^b f(x)dx = O \int_a^b f(x)dx.$$

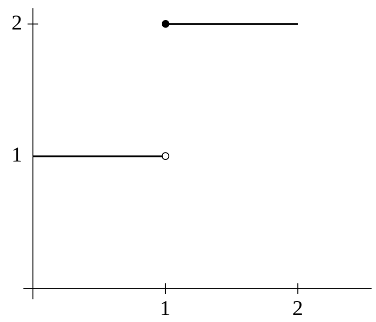

Abbildung 12: Die Funktion f aus Beispiel 10.1

Beispiel 10.1 Es sei $I = [0,2]$ und

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Für jede Zerlegung P, die den Punkt 1 enthält, gilt

$$U(f,P) = 1 + 2 = 3 = O(f,P).$$

Also ist f integrierbar und es gilt

$$\int_0^2 f(x)dx = 3.$$

Beispiel 10.2 Es sei $I = [0,1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann gilt für jede Zerlegung P von $[0,1]$:

$$U(f,P) = \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0,$$

$$O(f,P) = \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 1.$$

Also gilt

$$0 = U\int\limits_0^1 f(x)dx < O\int_0^1 f(x)dx = 1$$

und die Funktion f ist nicht integrierbar.

Satz 10.3 *Es sei $a < c < b$. Dann ist eine beschränkte Funktion f genau dann auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar, wenn sie auf $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Beweis. Man betrachte die Partitionen von $[a, b]$, die den Punkt c enthalten. □

Satz 10.4 *Falls f und g auf $I = [a, b]$ integrierbar sind, dann ist auch $f + g$ auf $I = [a, b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x).$$

Beweis. Es sei $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir definieren

$$m_i' := \inf \{f(x) |\ t_{i-1} \le x \le t_i\},$$
$$m_i'' := \inf \{g(x) |\ t_{i-1} \le x \le t_i\},$$
$$m_i := \inf \{f(x) + g(x) |\ t_{i-1} \le x \le t_i\}$$

und analog M_i', M_i'' und M_i. Dann gilt

$$m_i \ge m_i' + m_i'',\ M_i \le M_i' + M_i''.$$

Damit gilt für jede Zerlegung P:

$$U(f, P) + U(g, P) \le U(f + g, P) \le O(f + g, P) \le O(f, P) + O(g, P).$$

Hieraus folgt die Behauptung sofort. □

Satz 10.5 *Die Funktion f sei auf $I = [a, b]$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Funktion cf auf $I = [a, b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Klar. □

Satz 10.6 *Die Funktion f sei auf $I = [a, b]$ integrierbar. Es gelte*

$$m \le f(x) \le M, x \in [a, b].$$

Dann gilt

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a).$$

Beweis. Für jede Zerlegung P des Intervalls $I = [a, b]$ gilt

$$m(b - a) \le U(f, P) \le O(f, P) \le M(b - a).$$

□

Bemerkung 10.1 (1) Ist $a > b$, so definiert man

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

(2) Ist $f \ge 0$, so versteht man das Integral $\int_a^b f(x)dx$ als den *Flächeninhalt*, der vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird. Ist $f \le 0$, so wird dieser Flächeninhalt negativ gezählt.

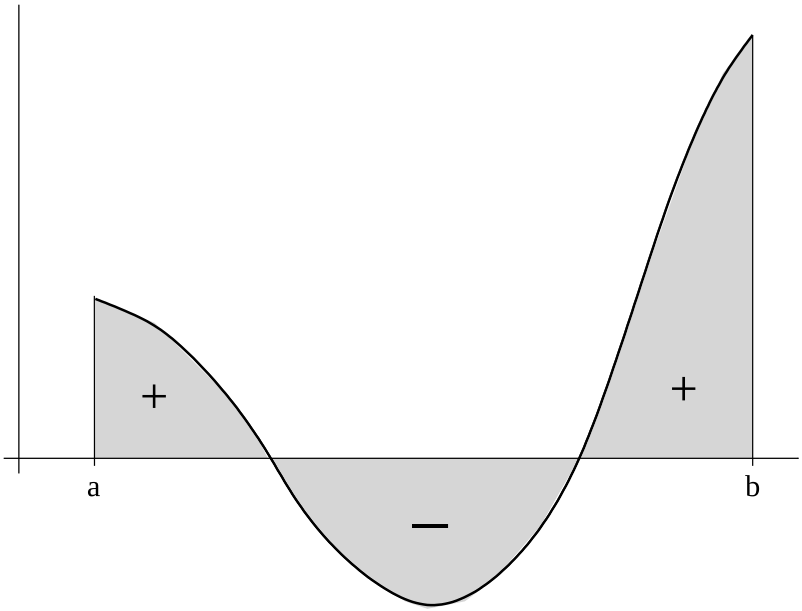

Abbildung 13: Das Integral als Flächeninhalt

11 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration hergestellt.

Theorem 11.1 (1. Hauptsatz) *: Es sei f auf $I = [a, b]$ integrierbar und im Punkt $c \in (a, b)$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

im Punkt c differenzierbar, und es gilt

$$F'(c) = f(c).$$

Beweis. Wir müssen den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

untersuchen. Es sei zunächst $h > 0$. Dann gilt

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)dt.$$

Wir definieren

$$m_h := \inf \{f(t)|c \leq t \leq c+h\},$$
$$M_h := \sup \{f(t)|c \leq t \leq c+h\}.$$

Dann gilt nach Satz 10.5:

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f(t)dt \leq M_h \cdot h,$$

und damit

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Diese Beziehung gilt auch für $h < 0$ mit

$$m_h := \inf \{f(t)|\ c+h \leq t \leq c\},$$

$$M_h := \sup \{f(t)|\ c+h \leq t \leq c\}.$$

Es gilt dann nämlich

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f(t)dt \leq M_h \cdot (-h).$$

Wegen

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)dt = -\int_{c+h}^{c} f(t)dt$$

folgt
$$m_h \cdot (-h) \leq F(c) - F(c+h) \leq M_h \cdot (-h).$$
Division durch $-h > 0$ zeigt dann, dass (1) auch in diesem Fall gilt.

Jetzt benützen wir, dass f im Punkt c stetig ist. Daraus folgt dann nämlich, dass
$$\lim_{h \to 0} m_h = f(c) = \lim_{h \to 0} M_h.$$
Damit gilt
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$
□

Korollar 11.1 *Die Funktion f sei stetig und integrierbar auf $I = [a, b]$ und es gelte $f = g'$ für eine Funktion g. Dann gilt*
$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

Beweis. Nach Theorem 11.1 ist die Funktion
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
differenzierbar, und es gilt
$$F'(x) = f(x) = g'(x).$$
Also gibt es eine reelle Zahl c mit
$$F = g + c.$$
Man kann die Konstante c wie folgt bestimmen:
$$c = F(a) - g(a) = -g(a).$$
Damit gilt
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = g(b) + c = g(b) - g(a).$$
□

Dieses Korollar ist die Grundlage für viele Integralberechnungen in der Praxis.

Bemerkung 11.1 Wir werden später sehen, dass die Voraussetzung, dass f integrierbar ist, bereits aus der Voraussetzung, dass f stetig ist, folgt.

Beispiel 11.1 Wir berechnen $\int_a^b x^2 dx$. In diesem Fall ist also $f(x) = x^2$ und für $g(x)$ können wir $g(x) = x^3/3$ wählen (oder auch $g(x) = x^3/3 + c$ für ein beliebiges c). Dann gilt
$$\int_a^b x^2 dx = g(b) - g(a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Definition Eine Funktion g mit $g' = f$ heißt eine *Stammfunktion* von f.

Wir verschärfen jetzt Korollar 11.1 indem wir zeigen, dass die Voraussetzung, dass f stetig ist, unnötig ist.

Theorem 11.2 (2. Hauptsatz:) *Die Funktion f sei integrierbar auf dem Intervall $I = [a, b]$ und es gelte $f = g'$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

Beweis. Es sei $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$. Nach dem Zwischenwertsatz der Differentialrechnung gibt es dann Punkte $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, für die gilt

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Es sei

$$m_i := \inf \{f(x) | \; t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$
$$M_i := \sup \{f(x) | \; t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Dann gilt offensichtlich

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

bzw.

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Summation über $i = 1, \ldots, n$ ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Damit gilt für jede Zerlegung P, dass

$$U(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq O(f, P)$$

und daraus folgt sofort, dass

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

□

Schließlich zeigen wir noch, dass jede stetige Funktion integrierbar ist.

Theorem 11.3 *Falls f auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetig ist, dann ist f auch integrierbar.*

Beweis. Wir definieren Funktion $U = U(x)$ und $O = O(x)$ auf I durch

$$U(x) = U \int_a^x f(t)dt, \; O(x) = O \int_a^x f(t)dt.$$

Es sei $x \in (a, b)$ und $h > 0$. Wir definieren für $h > 0$

$$m_h := \inf \{f(t) |\ x \leq t \leq x + h\},$$

$$M_h := \sup \{f(t) |\ x \leq t \leq x + h\}.$$

Dann gilt

$$m_h \cdot h \leq U \int_x^{x+h} f(t)dt \leq O \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M_h \cdot h.$$

Hieraus folgt

$$m_h \cdot h \leq U(x+h) - U(x) \leq O(x+h) - O(h) \leq M_h \cdot h,$$

bzw.

$$m_h \leq \frac{U(x+h) - U(x)}{h} \leq \frac{O(x+h) - O(x)}{h} \leq M_h.$$

Wie im Beweis von Theorem 11.1 zeigt man, dass diese Ungleichung auch für $h < 0$ gilt, wenn man setzt

$$m_h := \inf \{f(t) |\ x + h \leq t \leq x\},$$

$$M_h := \sup \{f(t) |\ x + h \leq t \leq x\}.$$

Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(x).$$

Dies zeigt, dass

$$U'(x) = O'(x) = f(x).$$

Also gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$U(x) = O(x) + c,\ x \in I.$$

Da $U(a) = 0 = O(a)$ muss $c = 0$ sein. D.h.

$$U(x) = O(x),\ x \in [a, b]$$

und damit gilt

$$U \int_a^b f(x)dx = U(b) = O(b) = O \int_a^b f(x)dx$$

und daher ist f integrierbar. □

Bemerkung 11.2 Es gibt viele integrierbare Funktionen, die nicht stetig sind, wie das Beispiel der *Treppenfunktion* zeigt.

12 Raumkurven

Wir beginnen in diesem Kapitel mit den Anfängen der *mehr-dimensionalen Analysis.* Der *n-dimensionale reelle Raum* ist das kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \ \ \text{(n Kopien)}.$$

D.h. die Elemente des $\mathbb{R}^n$ sind n-Tupel

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n); \ x_i \in \mathbb{R}.$$

Wir führen auf $\mathbb{R}^n$ eine *Metrik* ein, indem wir den Längenbegriff der Ebene $\mathbb{R}^2$, bzw. des Raums $\mathbb{R}^3$ verallgemeinern:

$$||x|| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Diese Längenfunktion hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (L1) & ||x|| \geq 0 \text{ und } ||x|| = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0 \\ (L2) & ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ (L3) & ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \text{ (Dreiecksungleichung).} \end{array}$$

Der *Abstand* zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ wird dann durch

$$d(x, y) := ||x - y||$$

definiert.

Definition Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : \quad \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_n(t)). \end{array}$$

Das Bild $f(I)$ heißt die *Spur* der Kurve f.

Man beachte, dass verschiedene Kurven dieselbe Spur haben können, die Kurven unterscheiden sich dann durch ihre Parametrisierung.

Definition Wir nennen f *stetig (differenzierbar, stetig differenzierbar)*, falls die Funktionen $f_i; i = 1, \ldots, n$ stetig (differenzierbar, stetig differenzierbar) sind.

Beispiel 12.1 (a) Es sei $v \in \mathbb{R}^n, \ 0 \neq w \in \mathbb{R}^n$. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(t) = v + tw$$

parametisiert eine *Gerade* durch den Punkt v mit Richtungsvektor w. Ist $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$, dann ist

$$f_i(t) = v_i + tw_i.$$

(b) Die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = (r\cos t, r\sin t),\ r > 0$$

parametisiert einen *Kreis* mit Radius r.
(c) Es seien $r, c > 0$. Dann stellt die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$$

eine *Schraubenlinie* dar.

Definition Es sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, $t \in I$. Der Vektor

$$f'(t) := (f_1'(t), \ldots, f_n'(t))$$

heißt der *Tangentenvektor* der Kurve f im Punkt t.

Bemerkung 12.1 Man kann den Tangentenvektor als den Limes

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

verstehen, wobei dieser Limes komponentenweise zu interpretieren ist.

Man verbindet hiermit oft die Vorstellung, dass $f(t)$ die Kurve f in Abhängigkeit der Zeit t durchläuft. Dann kann man $f'(t)$ als den Geschwindigkeitsvektor interpretieren. Die Länge des Vektors $f'(t)$, d.h.

$$||f'(t)|| = \sqrt{(f_1'(t))^2 + \cdots + (f_n'(t))^2}$$

ist dann der Betrag der Geschwindigkeit.

Definition Es sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Ein Punkt $t \in I$ mit $f'(t) \neq 0$ heißt ein *regulärer* Punkt der Kurve f. Gilt $f'(t) = 0$, so nennt man t einen *singulären* (oder *stationären*) Punkt der Kurve.

Beispiel 12.2 Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = (t^2, t^3)$$

heißt *Neilsche Parabel*. Wegen

$$f'(t) = (2t, 3t^2)$$

besitzt f genau einen singulären Punkt, nämlich den Nullpunkt $t = 0$.

Definition Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Die *Länge* dieser Kurve ist dann definiert durch

$$L := \int_a^b ||f'(t)||dt.$$

Man beachte, dass es sich hier um ein gewöhnliches Integral über eine stetige Funktion in einer Variablen handelt.

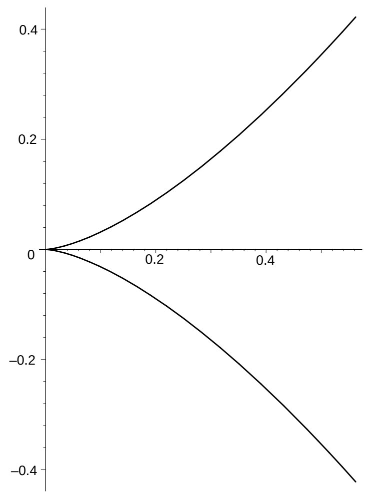

Abbildung 14: Neilsche Parabel

Beispiel 12.3 (a) Wir betrachten wieder den Kreis

$$f(t) = (r\cos t, r\sin t),\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Dann gilt

$$f'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

und damit

$$||f'(t)|| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r.$$

D.h.

$$L = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Dies ist die bekannte Formel für den Kreisumfang.
(b) Wir betrachten die Länge der *Zykloide*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Dies ist die Bahn eines Punktes auf dem Umfang eines Kreises vom Radius 1, der in der (x, y)- Ebene auf der x-Achse abgewickelt wird.

Wir wollen nun die Bogenlänge der Zykloide berechnen. Es gilt

$$f'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Man beachte, dass die Punkte $x_n = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ stationäre Punkte der Kurve f sind. Es gilt

$$\begin{aligned} ||f'(t)||^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \\ &= 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 2 - 2\cos t \\ &= 2 - 2(\cos^2 \tfrac{t}{2} - \sin^2 \tfrac{t}{2}) \\ &= 2 - 2(1 - 2\sin^2 \tfrac{t}{2}) \\ &= 4\sin^2 \tfrac{t}{2}. \end{aligned}$$

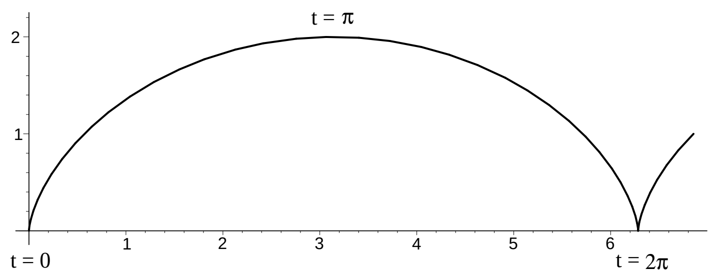

Abbildung 15: Zykloide

Also gilt

$$L = \int_0^{2\pi} ||f'(t)||dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin\frac{t}{2}|dt.$$

Durch die Substitution $u = t/2$ ergibt sich hieraus

$$L = 4\int_0^{\pi} \sin u = 4\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = 8.$$

Definition Man sagt, dass eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ *nach der Bogenlänge* parametisiert ist, falls $||f'(t)|| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkung 12.2 Ist $f\,[a,b] \to \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametisiert, dann gilt

$$L = \int_a^b ||f'(t)||dt = \int_a^b 1dt = b - a.$$

Dies erklärt die Bezeichnung dieses Begriffs.

Analysis A

Sommersemester 2004

Dozent: Prof. Dr. K. Hulek

Diese Vorlesung beruht auf der Ausarbeitung von
Prof. Dr. W. Ebeling
aus dem Sommersemester 2000.

Literatur

[1] S. L. Salas, E. Hille: Calculus. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1994. ISBN 3-86025-130-9

[2] M. Spivak: Calculus. Third Edition. Publish or Perish, Houston, 1994. ISBN 0-914098-89-6 (amerikanisch)

[3] O. Forster: Analysis 1. 5., überarb. Auflage. Vieweg, Wiesbaden, 1999. ISBN 3-528-47224-3

1 Grenzwerte

Notation Im folgenden ist $f : D \to \mathbb{R}$ immer eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Wenn wir D im folgenden nicht angeben, so soll D immer der maximale Definitionsbereich sein, auf dem f definiert ist. Ferner sind a, l usw. reelle Zahlen.

Der Grenzwertbegriff wird in dieser Vorlesung eine zentrale Rolle spielen. Wir wollen zunächst erklären was

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

bedeuten soll.

Provisorische Definition: Es gilt $\lim_{x \to a} f(x) = l$ gdw. man erreichen kann, dass $f(x)$ beliebig nahe bei l liegt, wenn man verlangt, dass x hinreichend nahe bei a, aber verschieden von a, ist.

Man beachte, dass $f(a)$ nicht definiert zu sein braucht.

Wir untersuchen nun diese Definition an einem Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ an der Stelle $a = 0$. Wir wollen zeigen

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Wie erreichen wir, dass $x \sin \frac{1}{x}$ in einem Abstand von $\frac{1}{10}$ von 0 liegt? Wir wollen also

$$-\frac{1}{10} < x \sin \frac{1}{x} < \frac{1}{10} \quad \text{oder} \quad \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10}.$$

Das ist aber leicht zu erreichen. Wir wissen

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad \text{für alle } x \neq 0,$$

also

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Das bedeutet also

$$|x| < \frac{1}{10},\ x \neq 0 \ \Rightarrow \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10}.$$

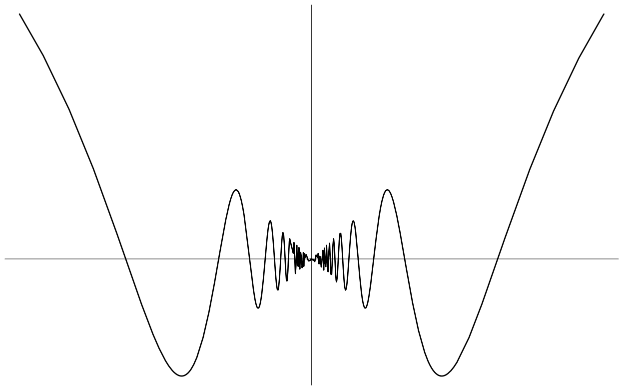

Abbildung 1: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Statt $\frac{1}{10}$ hätten wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ nehmen können, und dann gilt für $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$:

$$|x - 0| < \varepsilon \;\Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Betrachten wir ein anderes Beispiel: die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ an der Stelle $a = 0$. Um $|\sqrt{|x|}| < \varepsilon$ zu erreichen, müssen wir

$$|x| < \varepsilon^2$$

verlangen.

Sehen wir uns ein drittes Beispiel an. Für die Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ist es *falsch*, dass sie gegen 0 geht, wenn x gegen $a = 0$ geht. Es ist nicht wahr, dass wir für jedes $\varepsilon > 0$ erreichen können, dass $|f(x) - 0| < \varepsilon$ gilt, sofern $|x|$ hinreichend klein und ungleich 0 ist. Dazu brauchen wir nur *ein* $\varepsilon > 0$ zu finden, für das die Bedingung $|f(x) - 0| < \varepsilon$ nicht mehr garantiert ist, auch wenn wir verlangen, dass $|x|$ noch so klein ist. Zum Beispiel tut es $\varepsilon = \frac{1}{2}$: es gilt nicht $|f(x)| < \frac{1}{2}$ für alle hinreichend kleinen $|x|$. Denn für jedes $\delta > 0$ finden wir ein $x = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ mit $|x| < \delta$, für das $f(x) = 1$ gilt.

Wir wollen nun unsere provisorische Definition zu einer mathematisch präzisen machen. Wir präzisieren die Teile der provisorischen Definition wie folgt:

Man kann erreichen, dass $f(x)$ beliebig nahe bei l liegt,	Für ein beliebig gewähltes $\varepsilon > 0$ gilt $\|f(x) - l\| < \varepsilon$,
wenn man verlangt,	wenn man verlangt,
dass x hinreichend nahe bei a, aber verschieden von a, ist.	dass x eine Ungleichung der Form $0 < \|x - a\| < \delta$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ erfüllt.

Damit kommen wir zu der folgenden Definition.

Definition Es gilt $\lim_{x \to a} f(x) = l$ gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes x aus $0 < |x - a| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt.

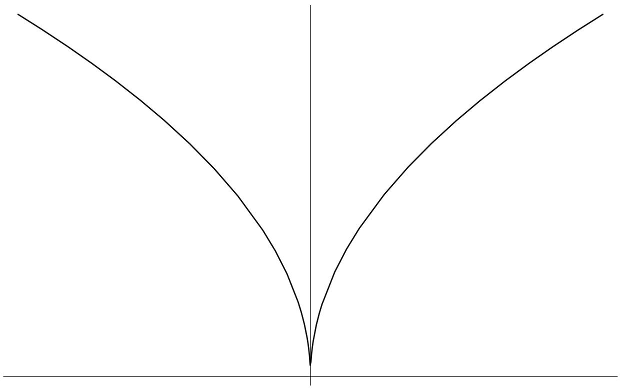

Abbildung 2: $f(x) = \sqrt{|x|}$

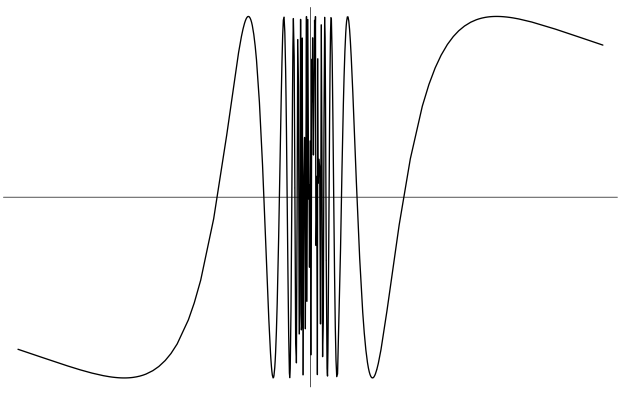

Abbildung 3: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

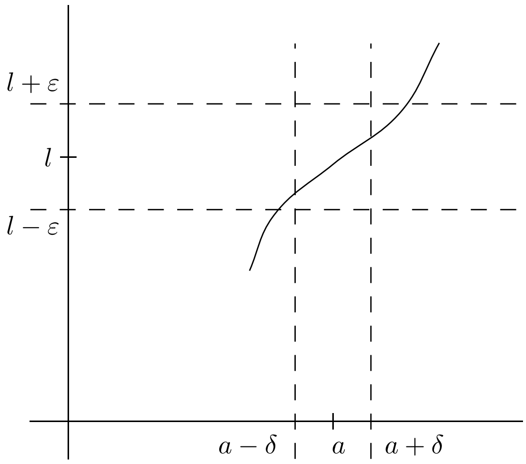

Abbildung 4: $\lim_{x\to a} f(x) = l$

In unserem Beispiel $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ konnten wir $\delta = \varepsilon$ wählen. In dem Beispiel $f(x) = \sqrt{|x|}$ tat es $\delta = \varepsilon^2$.

Es ist wichtig, sich die logische Struktur dieser Definition noch einmal klarzumachen. Deswegen schreiben wir diese Definition auch noch einmal formal hin:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Was haben wir zu tun, wenn wir $\lim_{x\to a} f(x) = l$ beweisen wollen? Wir müssen uns zunächst ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgeben. Dann müssen wir dazu ein geeignetes $\delta > 0$ finden, so dass für alle x mit $0 < |x-a| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt.

Wie kann man zeigen, dass $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *nicht* gilt? Wenn es *nicht* wahr ist, dass gilt

> es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle x, für die $0 < |x-a| < \delta$ gilt, auch $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt,

dann gilt:

> es gibt *ein* $\varepsilon > 0$, so dass für *jedes* $\delta > 0$ es *ein* x gibt, für das $0 < |x-a| < \delta$ aber nicht $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt.

Um also zu zeigen, dass $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ nicht den Grenzwert 0 bei 0 hat, betrachten wir $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und stellen fest, dass es für jedes $\delta > 0$ ein x mit $0 < |x - 0| < \delta$ aber nicht $|\sin \frac{1}{x} - 0| < \frac{1}{2}$ gibt, nämlich ein x von der Form $x = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$, wobei n so groß ist, dass $\frac{1}{\pi/2+2n\pi} < \delta$ gilt.

Beispiel 1.1 (a) Für die konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$ für jeden Punkt a: Da $|f(x) - c| = 0$ für alle x gilt, tut es jedes beliebige δ.

(b) Für die Funktion $f(x) = x$ gilt $\lim_{x\to a} f(x) = a$ für jeden Punkt a: Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ können wir $\delta := \varepsilon$ wählen, denn aus $0 < |x-a| < \varepsilon$ folgt $|f(x) - a| < \varepsilon$.

(c) Nun betrachten wir ein weniger einfaches Beispiel, an dem wir auch das allgemeine Vorgehen klarmachen können. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ und einen beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen:

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir untersuchen zunächst, wie wir

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon$$

erreichen können. Es gilt

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x-a| \cdot |x+a| < \varepsilon.$$

Der Faktor $|x-a|$ wird beliebig klein, wenn wir x gegen a gehen lassen, nicht so aber der Faktor $|x+a|$. Es ist aber auch gar nicht nötig, auch diesen Faktor besonders klein werden zu lassen, er darf nur nicht unbeschränkt wachsen. Wir suchen also eine obere Schranke für diesen Faktor. Denn wenn wir zum Beispiel $|x+a| < 1000000$ haben, so brauchen wir nur $|x-a| < \frac{\varepsilon}{1000000}$ zu verlangen. Da wir nur x zu untersuchen brauchen, die nahe bei a liegen, können wir voraussetzen, dass $|x-a| < 1$ gilt (man könnte statt 1 auch jede beliebige andere positive Zahl nehmen). Für solche x gilt dann

$$\begin{aligned} |x+a| &\le |x-a+2a| \\ &\le |x-a| + 2|a| \\ &< 1 + 2|a|. \end{aligned}$$

Das führt dazu, dass wir

$$\delta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\right)$$

setzen. Denn dann gilt für alle x

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

Beispiel 1.2 Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irrational}, \\ 1, & x \text{ rational}. \end{cases}$$

Diese Funktion hat für keinen Punkt a einen Grenzwert. Denn für jede Zahl l können wir $\varepsilon = \frac{1}{4}$ wählen. Wie klein wir auch $\delta > 0$ wählen, so können wir immer sowohl ein rationales als auch ein irrationales x mit $|x-a| < \delta$ finden. Für eines dieser beiden x kann dann *nicht* $|f(x) - l| < \frac{1}{4}$ gelten.

Wir formulieren und beweisen nun zwei grundlegende Sätze.

Satz 1.1 (Die Eindeutigkeit des Grenzwertes) *Wenn* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *und* $\lim_{x\to a} f(x) = m$ *ist, so gilt* $l = m$.

Beweis. Da dies unser erster Beweis ist, soll er ausführlich dargestellt werden. Wenn man einen Beweis beginnt, macht man sich zuerst die Voraussetzungen klar. Dazu schreiben wir einfach die Definitionen aus:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

bedeutet, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$ gibt, so dass für alle x gilt:

$$\text{wenn } 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ ist, so folgt } |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Andererseits bedeutet

$$\lim_{x\to a} f(x) = m,$$

dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_2 > 0$ gibt, so dass für alle x gilt:

$$\text{wenn } 0 < |x-a| < \delta_2 \text{ ist, so folgt } |f(x)-m| < \varepsilon.$$

Wir mußten dabei zwei verschiedene Zahlen δ_1 und δ_2 benutzen, da es keinen Grund gibt, warum das δ, das es in dem einen Fall tut, auch für den anderen Fall geeignet ist. Wir können nun aber leicht schließen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so gilt für alle x gilt

$$\text{wenn } 0 < |x-a| < \delta \text{ ist, so folgt } |f(x)-l| < \varepsilon \text{ und } |f(x)-m| < \varepsilon,$$

denn wir können einfach $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ wählen.

Wir wollen nun einen Widerspruchsbeweis führen. Das bedeutet, dass wir die Annahme $l \neq m$ auf einen Widerspruch führen wollen. Wir nehmen also $l \neq m$ an. Wir wollen nun ε so wählen, dass die beiden Bedingungen

$$|f(x)-l| < \varepsilon \text{ und } |f(x)-m| < \varepsilon$$

nicht beide gelten können. Man mache sich an einer Skizze klar, wie wir ε wählen können. Wir wählen

$$\varepsilon := \frac{|l-m|}{2}.$$

Dann folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x mit $0 < |x-a| < \delta$ gilt:

$$|f(x)-l| < \frac{|l-m|}{2} \text{ und } |f(x)-m| < \frac{|l-m|}{2}.$$

Daraus folgt aber für alle x mit $0 < |x-a| < \delta$

$$\begin{aligned} |l-m| = |l-f(x)+f(x)-m| &\le |l-f(x)| + |f(x)-m| \\ &< \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2} \\ &= |l-m|, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Satz 1.2 (Rechenregeln für Grenzwerte) *Wenn* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) = m$ *ist, so gilt*

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + m$,

(2) $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m$,

und, wenn $m \neq 0$,

(3) $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$.

Beweis. Wir beweisen nur (1). Die Beweise von (2) und (3) sind schwieriger und sollen nicht ausgeführt werden.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für den Beweis von (1) müssen wir zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass,

$$\text{wenn } 0 < |x-a| < \delta \text{ ist, } |(f+g)(x) - (l+m)| < \varepsilon \text{ folgt.}$$

Dabei benötigen wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (l+m)| &= |f(x) + g(x) - l - m| \\ &= |(f(x) - l) + (g(x) - m)| \\ &\leq |f(x) - l| + |g(x) - m| \end{aligned}$$

Um also $|(f+g)(x) - (l+m)|$ kleiner als ε zu machen, genügt es, wenn wir sowohl $|f(x) - l|$ als auch $|g(x) - m|$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ machen. Aus $\varepsilon > 0$ folgt $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Wegen

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = m$$

gibt es ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle x gilt:

$$\text{wenn } 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ ist, so folgt } |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

und ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle x gilt:

$$\text{wenn } 0 < |x-a| < \delta_2 \text{ ist, so folgt } |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setzen wir jetzt $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, so folgt für alle x

$$\begin{aligned} & 0 < |x-a| < \delta \\ \Rightarrow\ & 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ und } 0 < |x-a| < \delta_2 \\ \Rightarrow\ & |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow\ & |(f+g)(x) - (l+m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \varepsilon, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Wir wollen nun auch noch einseitige Grenzwerte und Grenzwerte für x gegen ∞ definieren.

Definition Es gilt $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ (l *ist rechtsseitiger Grenzwert von* $f(x)$ *für* x *gegen* a) gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes x aus $0 < x - a < \delta$ folgt, dass $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt.

Definition Es gilt $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ (l *ist linksseitiger Grenzwert von* $f(x)$ *für* x *gegen* a) gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes x aus $0 < a - x < \delta$ folgt, dass $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt.

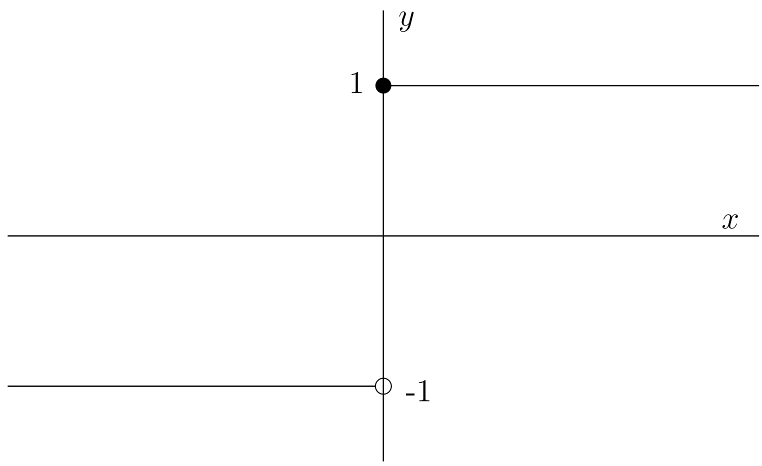

Abbildung 5: Die Funktion aus Beispiel 1.3

Beispiel 1.3 Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \text{ aber } \lim_{x\to 0} f(x) \neq l$$

für jede Zahl l.

Definition Es gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl N gibt, so dass für alle x aus $x > N$ folgt, dass $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt. Ebenso gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl N gibt, so dass für alle x mit $x < N$ folgt, dass $|f(x) - l| < \varepsilon$ gilt.

2 Stetigkeit

Es soll nun der Begriff der Stetigkeit in einem Punkt definiert werden.

Definition Die Funktion f heißt *im Punkt a stetig* gdw.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Beispiel 2.1 (a) Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

(b) Die identische Funktion $f(x) = x$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

(c) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

(d) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

ist in 0 nicht stetig.

(e) Die Funktion

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

ist in 0 nicht definiert. Sie kann aber in 0 *stetig ergänzt werden.* Denn die neue Funktion

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist in 0 stetig.

(f) Die Funktion

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

kann nicht stetig in 0 ergänzt werden.

(g) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irrational}, \\ 1, & x \text{ rational}, \end{cases}$$

ist nach Beispiel 1.2 in keinem Punkt a stetig.

Satz 2.1 (Rechenregeln für stetige Funktionen) *Wenn f und g im Punkt a stetig sind, dann ist*

(1) *$f + g$ stetig in a,*

(2) *$f \cdot g$ stetig in a.*

Gilt darüberhinaus $g(a) \neq 0$, so ist

(3) *$1/g$ stetig in a.*

Beweis. Zu (1): Da f und g im Punkt a stetig sind, gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Nach Satz 1.2 folgt daraus

$$\lim_{x\to a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Das bedeutet aber gerade, dass $f + g$ im Punkt a stetig ist.

Die Beweise zu (2) und (3) gehen analog. □

Beispiel 2.2 Aus Satz 2.1 folgt, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x^3 - x}{(x-2)(x-3)}$$

in jedem Punkt a mit Ausnahme der Stellen $a = 2$ und $a = 3$, an denen sie nicht definiert ist, stetig ist. Die Funktion kann in diesem Punkte stetig fortgesetzt werden.

Wir wollen nun den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt in die ε-δ-Sprache übersetzen. Eine direkte Übersetzung von

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

wäre:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x gilt:
wenn $0 < |x - a| < \delta$ ist, so folgt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Die Forderung $0 < |x-a|$ ist hierbei überflüssig, denn für $x = a$ gilt $f(x) = f(a)$ und damit $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Damit erhalten wir

Satz 2.2 (ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit) *Die Funktion f ist stetig in a gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x aus $|x - a| < \delta$ folgt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.* □

Wir betrachten nun die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ von zwei Funktionen f und g. Wir erinnern an die Definition: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Satz 2.3 (Verkettung stetiger Funktionen) *Ist g stetig in a und f stetig in $g(a)$, so ist $f \circ g$ stetig in a. (Man beachte, dass wir verlangen, dass f in $g(a)$ stetig ist, nicht in a.)*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Gesucht ist ein $\delta > 0$, so dass für alle x gilt:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir nutzen zunächst die Stetigkeit von f im Punkt $g(a)$ aus, um abzuschätzen, wie dicht $g(x)$ bei $g(a)$ liegen muß, damit diese Ungleichung erfüllt ist. Da f in $g(a)$ stetig ist, gibt es ein $\delta' > 0$, so dass für alle y gilt

$$|y - g(a)| < \delta' \Rightarrow |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Insbesondere können wir hier $y = g(x)$ einsetzen:

$$|g(x) - g(a)| < \delta' \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \tag{1}$$

Nun nutzen wir die Stetigkeit von g im Punkt a aus. Wir können das δ' als unser ε in der Definition der Stetigkeit von g in a nehmen. Wir schließen daraus, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x gilt:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta'. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhalten wir das gewünschte Resultat: Für alle x gilt

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

□

Beispiel 2.3 Wir betrachten erneut die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Wir haben bereits gesehen (Beispiel 2.1), dass f stetig in 0 ist. Aus Satz 2.1 und 2.3 folgt, dass f auch in allen Punkten $a \neq 0$ stetig ist.

Nun betrachten wir Funktionen, die in allen Punkten eines Intervalls stetig sind.

Notation Wir erinnern daran, dass

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

das *offene Intervall* und

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

das *abgeschlossene Intervall* mit Anfangspunkt a und Endpunkt b bezeichnet.

Definition Eine Funktion f heißt *auf* (a, b) *stetig* gdw. f in allen Punkten $x_0 \in (a, b)$ stetig ist.
Eine Funktion f heißt *auf* $[a, b]$ *stetig* gdw. gilt:

(1) f ist stetig in allen Punkten $x_0 \in (a, b)$,

(2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ und $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Die folgende wichtige Eigenschaft der Stetigkeit werden wir noch oft anwenden.

Satz 2.4 *Es sei f in a stetig und $f(a) > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $|x - a| < \delta$ gilt: $f(x) > 0$. Wenn $f(a) < 0$ ist, so gibt es entsprechend ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $|x - a| < \delta$ gilt: $f(x) < 0$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $f(a) > 0$. Da f in a stetig ist, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle x gilt:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Da $f(a) > 0$ ist, können wir für unser ε die Zahl $f(a)$ nehmen. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x gilt:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < f(a).$$

Die letzte Ungleichung bedeutet aber, dass $f(x) > 0$.
Den Fall $f(a) < 0$ behandelt man analog oder wendet den ersten Teil auf die Funktion $-f$ an. □

3 Drei grundlegende Sätze

Wir formulieren in diesem Kapitel drei grundlegende Sätze. Die Beweise dieser Sätze stellen wir zunächst zurück.

Satz 3.1 (Zwischenwertsatz) *Wenn f auf $[a,b]$ stetig ist und c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ist, dann gibt es mindestens ein $x \in [a,b]$, für das $f(x) = c$ ist.*

Satz 3.2 (Beschränkheitssatz) *Wenn f auf $[a,b]$ stetig ist, dann ist f auf $[a,b]$ beschränkt, d.h. es gibt Zahlen K und N, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt: $K \leq f(x) \leq N$.*

Satz 3.3 (Maximum-Minimum-Satz) *Wenn f auf $[a,b]$ stetig ist, dann nimmt f auf $[a,b]$ sowohl ein Maximum M als auch ein Minimum m an, d.h. es gibt $x \in [a,b]$ und $y \in [a,b]$ mit $f(x) = M$ und $f(y) = m$ und für alle $z \in [a,b]$ gilt $m \leq f(z) \leq M$.*

Offensichtlich folgt Satz 3.2 aus Satz 3.3.

Wir wollen uns zunächst klarmachen, dass die Aussagen dieser Sätze nicht zu gelten brauchen, wenn f in einem Punkt des Intervalls $[a,b]$ nicht stetig ist.

Beispiel 3.1 Es sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -3 \leq x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Dann ist f in jedem Punkt von $[-3,3]$ mit Ausnahme von 0 stetig. Die Funktion f nimmt keinen Wert c mit $-1 < c < 1$ an.

Beispiel 3.2 Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f in allen Punkten von $[0,1]$ mit Ausnahme von 0 stetig. Die Funktion f ist nicht nach oben beschränkt.

Beispiel 3.3 Es sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{für } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Dann ist f in allen Punkten von $[0,2]$ außer in 1 stetig. Die Funktion f ist beschränkt, nimmt aber kein Maximum an.

Wir betrachten nun eine Anwendung des Zwischenwertsatzes.

Satz 3.4 *Jede positive Zahl besitzt eine Quadratwurzel, d.h. für jede Zahl $\alpha > 0$ gibt es eine Zahl $x > 0$ mit $x^2 = \alpha$.*

Beweis. Es sei $\alpha > 0$ gegeben. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$. Diese Funktion ist nach Beispiel 2.1 (c) überall stetig. Dann kann die Behauptung des Satzes so formuliert werden: Die Funktion f nimmt den Wert α an. Um den Zwischenwertsatz anwenden zu können, müssen wir a und b finden, so dass $f(a) < \alpha < f(b)$ ist. Wegen $f(0) = 0$ und $\alpha > 0$ können wir $a = 0$ wählen. Da f für x gegen ∞ unbeschränkt wächst, können wir auch ein b finden mit $\alpha < f(b)$. Genauer gilt folgendes. Wenn $\alpha > 1$ ist, wählen wir $b = \alpha$ (denn dann gilt $f(b) = \alpha^2 > \alpha$), und wenn $\alpha < 1$ ist, wählen wir $b = 1$. (Für $\alpha = 1$ gilt $1^2 = 1$.) Wenden wir nun den Zwischenwertsatz auf die Funktion f und das Intervall $[a, b]$ an, so folgt, dass es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = \alpha$ gibt. $\square$

Wie findet man nun in der Situation des Zwischenwertsatzes so ein x mit $f(x) = c$? Der Zwischenwertsatz selber sagt darüber nichts aus. Die einfachste Methode, so ein x näherungsweise zu bestimmen, ist die sogenannte *Bisektionsmethode.* Um sie darzustellen, betrachten wir die folgende Situation.

Es sei f auf $[a, b]$ stetig und

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \text{oder} \quad f(b) < 0 < f(a).$$

Gesucht ist eine Lösung x der Gleichung $f(x) = 0$ im Intervall $[a, b]$. Der Zwischenwertsatz besagt, dass die Gleichung $f(x) = 0$ mindestens eine Lösung in $[a, b]$ hat. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass nur eine solche Lösung existiert. Wir nennen sie ξ. Die Bisektionsmethode ist ein iterativer Prozeß, um einen Näherungswert für ξ zu bestimmen.

Zu Beginn setzen wir $a_1 := a$ und $b_1 := b$. Nun halbieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$. Es sei $m_1 := a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_1, b_1]$. Gilt $f(m_1) = 0$, so ist $\xi := m_1$ die gesuchte Lösung und wir sind fertig. Andernfalls ist $f(m_1) > 0$ oder $f(m_1) < 0$. Haben $f(a_1)$ und $f(m_1)$ verschiedene Vorzeichen, so muß nach dem Zwischenwertsatz das gesuchte ξ im Intervall $[a_1, m_1]$ liegen und wir setzen $a_2 := a_1$ und $b_2 := m_1$. Andernfalls muß ξ in $[m_1, b_1]$ liegen und wir setzen $a_2 := m_1$ und $b_2 := b_1$.

Nun halbieren wir das Intervall $[a_2, b_2]$. Es sei $m_2 := a_2 + \frac{b_2 - a_2}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_2, b_2]$. Gilt $f(m_2) = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls setzen wir $[a_3, b_3] := [a_2, m_2]$ oder $[a_3, b_3] := [m_2, b_2]$, je nachdem ob $f(a_2)$ und $f(m_2)$ oder $f(m_2)$ und $f(b_2)$ verschiedene Vorzeichen haben. Nun halbieren wir wieder $[a_3, b_3]$ usw.

Nach n Halbierungen untersuchen wir den Mittelpunkt m_n des Intervalls $[a_n, b_n]$. Wir können dann sicher sein, dass

$$|\xi - m_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}\right) = \cdots = \frac{b - a}{2^n}$$

ist. Wenn wir also ξ durch m_n bis auf einen Fehler $\varepsilon > 0$ annähern wollen, so müssen wir n Iterationsschritte ausführen, wobei

$$\frac{b - a}{2^n} < \varepsilon$$

ist.

Beispiel 3.4 Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - 2$. Nach Satz 3.4 besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung, nämlich $x = \sqrt{2}$. Da $f(1) < 0$ und $f(2) > 0$

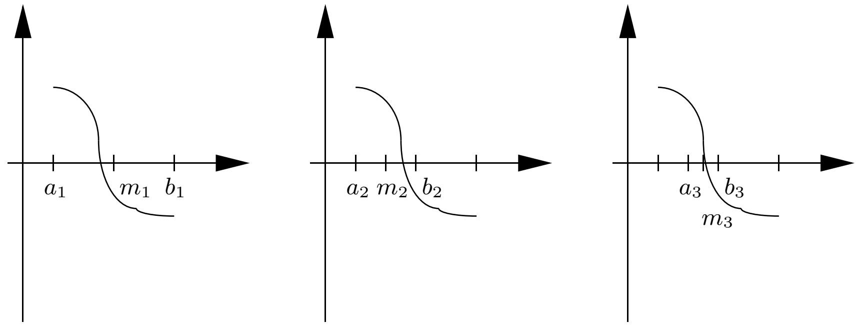

Figure 6: Die Bisektionsmethode

ist, können wir $\sqrt{2}$ durch Anwenden der Bisektionsmethode auf das Intervall $[1, 2]$ abschätzen. Angenommen, wir wollen $\sqrt{2}$ bis auf einen Fehler von $0,15$ abschätzen. Dazu brauchen wir mindestens n Iterationsschritte, wobei

$$\frac{2-1}{2^n} < 0,15$$

ist. Das ist aber der Fall, wenn $n \geq 3$ ist.

$$\begin{aligned} a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ m_1 = 1,5 \quad &: \quad f(m_1) = 0,25 > 0 \\ a_2 = 1,\ b_2 = 1,5,\ m_2 = 1,25 \quad &: \quad f(m_2) = -0,4375 < 0 \\ a_3 = 1,25,\ b_3 = 1,5,\ m_3 = 1,375 \quad & \end{aligned}$$

Wir schließen daraus, dass $\sqrt{2}$ von $m_3 = 1,375$ mit einer Genauigkeit von $0,15$ approximiert wird.

4 Supremum, Infimum

Es sollen nun wichtige neue Begriffe eingeführt und die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen betrachtet werden.

Definition Eine Menge A von reellen Zahlen heißt *nach oben beschränkt* gdw. es eine Zahl x gibt, so dass

$$a \leq x \text{ für alle } a \in A$$

gilt. Eine solche Zahl x heißt eine *obere Schranke* für A.

Definition Eine Zahl x heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A (in Zeichen $x = \sup A$) gdw. gilt:

(i) x ist eine obere Schranke von A, und

(ii) wenn y eine obere Schranke von A ist, so gilt $x \leq y$.

Satz 4.1 (Eindeutigkeit des Supremums) *Sind x und y kleinste obere Schranken von A, so gilt $x = y$.*

Beweis. Es gilt

$$x \leq y,$$

da y eine obere Schranke und x eine kleinste obere Schranke von A ist, und

$$y \leq x,$$

da x eine obere Schranke und y eine kleinste obere Schranke von A ist. Deshalb folgt $x = y$. □

Wegen Satz 4.1 können wir von *dem* Supremum von A sprechen.

Definition Eine Zahl x heisst *Maximum* von A (in Zeichen $x = \max A$), falls

(i) x ist Supremum von A,

(ii) $x \in A$.

Entsprechend können wir definieren:

Definition Eine Menge A von reellen Zahlen heißt *nach unten beschränkt* gdw. es eine Zahl x gibt, so dass

$$x \leq a \text{ für alle } a \in A$$

gilt. Eine solche Zahl x heißt eine *untere Schranke* für A.

Definition Eine Zahl x heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum* von A (in Zeichen $x = \inf A$) gdw. gilt:

(i) x ist eine untere Schranke von A, und

(ii) wenn y eine untere Schranke von A ist, so gilt $y \leq x$.

Wie im Fall des Supremums kann man auch im Fall des Infimums zeigen, dass das Infimum, wenn es existiert, eindeutig bestimmt ist.

Definition Eine Zahl x heisst *Minimum* von A (in Zeichen $x = \min A$), falls

(i) x ist Infinum von A,

(ii) $x \in A$.

Definition Eine Menge A heißt *beschränkt* gdw. A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 4.1 Es sei f eine Funktion, die auf $[a, b]$ definiert ist. Wir betrachten die Menge

$$A := \{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}.$$

Dann ist f genau dann auf $[a, b]$ beschränkt, wenn A beschränkt ist. Die Funktion f nimmt auf $[a, b]$ genau dann ein Maximum und ein Minimum an, wenn A ein Maximum und ein Minimum besitzt.

Beispiel 4.2 (a) Die leere Menge ist nach oben beschränkt. Denn jede Zahl x ist eine obere Schranke für $\emptyset$: Die Bedingung

$$a \leq x \quad \text{für jedes } a \in \emptyset$$

ist einfach deswegen erfüllt, weil es kein $a \in \emptyset$ gibt. Da jede Zahl eine obere Schranke für $\emptyset$ ist, gibt es offensichtlich keine kleinste obere Schranke.

(b) Es sei

$$A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}.$$

Dann ist A nach oben beschränkt, $\sqrt{2}$ ist eine obere Schranke von A und dies ist auch das Supremum von A.

Beweis. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist eine obere Schranke von A, denn für alle x gilt

$$x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}.$$

Diese Zahl ist auch die kleinste obere Schranke: Angenommen, $\alpha < \sqrt{2}$ wäre auch eine obere Schranke von A. Diese Annahme führen wir zum Widerspruch, indem wir ein h mit $0 < h < 1$ so bestimmen, dass $\alpha + h \in A$ gilt. Es gilt

$$\alpha + h \in A \Leftrightarrow (\alpha + h)^2 < 2 \Leftrightarrow 2h\alpha + h^2 < 2 - \alpha^2.$$

Wegen $h < 1$ gilt

$$2h\alpha + h^2 < 2h\alpha + h.$$

Setze

$$2h\alpha + h = 2 - \alpha^2 \text{ d.h. } h := \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1}.$$

Wegen $1 < \alpha < \sqrt{2}$ gilt $0 < h < 1$ und nach Konstruktion von h gilt $\alpha + h \in A$.

(c) Es sei

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}.$$

Dann ist A nach oben beschränkt, z.B. ist 2 eine obere Schranke von A, aber A hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Wir sehen an diesem Beispiel, dass im allgemeinen eine nicht leere, nach oben beschränkte Menge kein Supremum zu haben braucht. Es ist eine besondere Eigenschaft der reellen Zahlen, dass jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt. Diese Eigenschaft ist so grundlegend, dass wir sie nicht ableiten können, sondern als Axiom betrachten müssen.

Axiom (Das Supremumsaxiom) *Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt ein Supremum.*

Wie wir in Beispiel 4.2 (c) gesehen haben, besitzen die rationalen Zahlen diese Eigenschaft nicht.

Wir sind nun in der Lage, den Zwischenwertsatz zu beweisen. Es reicht, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.2 *Ist f auf $[a,b]$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$, dann gibt es eine Zahl $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$.*

Ableitung von Satz 3.1 aus Satz 4.2.. Es sei $f(a) < c < f(b)$. Dann setze $g(x) := f(x) - c$. Dann ist g auf $[a,b]$ stetig und es gilt $g(a) < 0 < g(b)$. Nach Satz 4.2 gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $g(x) = 0$. Das bedeutet aber $f(x) = c$.

Gilt $f(b) < c < f(a)$, so betrachte man $g(x) := c - f(x)$. □

Beweis von Satz 4.2.. Definiere

$$A := \{x \in [a,b] \,|\, f \text{ negativ auf dem Intervall } [a,x]\}.$$

Dann ist $A \neq \emptyset$, da $a \in A$. Tatsächlich folgt aus Satz 2.4 und der Voraussetzung $f(a) < 0$, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass A alle Punkte x mit $a \leq x < a+\delta$ enthält.

Die Menge A ist nach oben beschränkt, da b eine obere Schranke für A ist. Tatsächlich folgt wieder aus Satz 2.4 und der Voraussetzung $f(b) > 0$, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Punkte x mit $b - \delta < x \leq b$ obere Schranken von A sind.

Aus dem Supremumsaxiom folgt daher, dass A ein Supremum α besitzt. Aus den obigen Bemerkungen folgt $a < \alpha < b$. Wir wollen $f(\alpha) = 0$ zeigen. Dazu führen wir die Annahmen $f(\alpha) > 0$ und $f(\alpha) < 0$ zum Widerspruch.

Angenommen, $f(\alpha) < 0$. Nach Satz 2.4 gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) < 0$ für alle x mit $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ gilt. Nun gibt es eine Zahl x_0 in A mit $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$, denn sonst wäre α nicht die *kleinste* obere Schranke. Das bedeutet, dass f auf dem ganzen Intervall $[a,x_0]$ negativ ist. Ist andererseits x_1 eine Zahl mit $\alpha < x_1 < \alpha + \delta$, so ist f auch negativ auf $[x_0,x_1]$. Daher ist f negativ auf dem Intervall $[a,x_1]$. Das bedeutet aber, dass x_1 in A liegt. Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, dass α eine obere Schranke von A ist. Also war die Annahme $f(\alpha) < 0$ falsch.

Angenommen, $f(\alpha) > 0$. Nach Satz 2.4 gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > 0$ für alle x mit $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ gilt. Wie oben schließen wir, dass es dann ein x_0 in A mit $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$ gibt. Das bedeutet aber, dass f auf $[a,x_0]$ negativ ist. Das ergibt aber einen Widerspruch zu $f(x_0) > 0$. Also war auch die Annahme $f(\alpha) > 0$ falsch, und es bleibt als einzige Möglichkeit $f(\alpha) = 0$ übrig. □

Die Beweise der Sätze 3.2 und 3.3 verlaufen nach einem ähnlichen Muster und sollen hier nicht gegeben werden.

Wir wollen nun noch andere Folgerungen aus dem Supremumsaxiom darstellen.

Satz 4.3 *Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Da $\mathbb{N} \neq \emptyset$, gibt es dann ein Supremum α für $\mathbb{N}$. Es gilt also

$$n \leq \alpha \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Andererseits gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n_0 > \alpha - 1,$$

denn sonst wäre $\alpha - 1$ obere Schranke von $\mathbb{N}$ im Widerspruch dazu, dass α die *kleinste* obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. Für n_0 gilt also

$$n_0 + 1 > \alpha,$$

ein Widerspruch. □

Satz 4.4 (Satz von Archimedes) *Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und jedem $b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $na > b$ gilt.*

Beweis. Andernfalls würde für alle $n \in \mathbb{N}$

$$na \leq b \quad \text{d.h.} \quad n \leq \frac{b}{a}$$

gelten, $\frac{b}{a}$ wäre also eine obere Schranke für $\mathbb{N}$. □

Satz 4.5 *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \neq 0$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis. Da

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n\varepsilon > 1,$$

folgt die Behauptung aus dem Satz von Archimedes mit $a = \varepsilon$ und $b = 1$. □

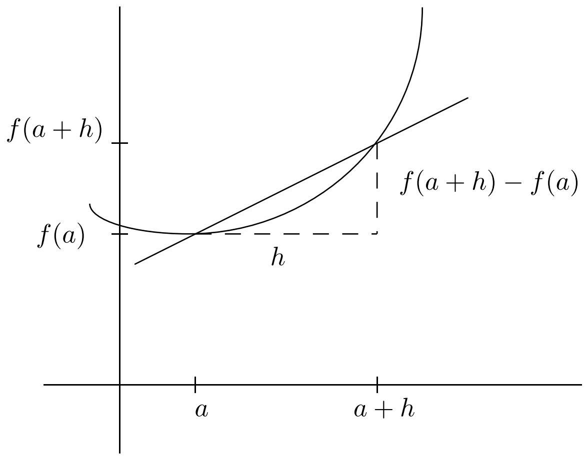

Figure 7: Steigung der Sekante von $(a, f(a))$ nach $(a+h, f(a+h))$

5 Differenzierbarkeit

Wir kommen nun zur Definition der Differenzierbarkeit.

Anschaulich gibt die Ableitung von f im Punkt a die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ an. Man erhält diese Steigung als Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(a, f(a))$. Die Sekante von $(a, f(a))$ nach $(a+h, f(a+h))$ hat die Steigung

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Definition Die Funktion f heißt *differenzierbar in* a gdw.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existiert.}$$

In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $f'(a)$ bezeichnet und heißt die *Ableitung von f in a*.

Wir nennen f *differenzierbar* gdw. f in jedem Punkt a aus dem Definitionsbereich von f differenzierbar ist.

Beispiel 5.1 Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist in 0 differenzierbar, denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

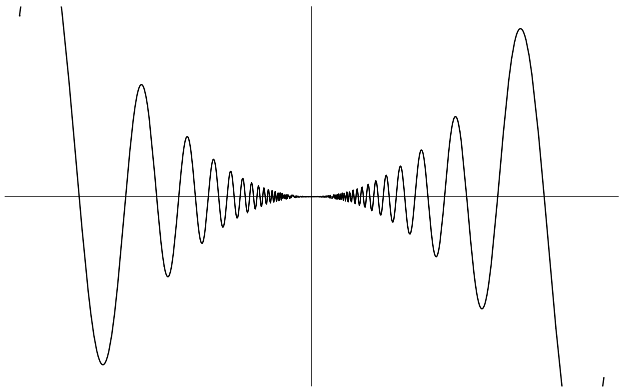

Figure 8: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

Also gilt $f'(0) = 0$.

Eine in a stetige Funktion braucht nicht in a differenzierbar zu sein.

Beispiel 5.2 Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist in 0 stetig. Sie ist aber in a *nicht* differenzierbar, denn es gilt für $h \neq 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \sin \frac{1}{h}.$$

Wir haben aber bereits gezeigt, dass die Funktion $\sin \frac{1}{h}$ in 0 keinen Grenzwert hat.

Obwohl nicht jede stetige Funktion differenzierbar ist, ist jede differenzierbare Funktion stetig.

Satz 5.1 *Wenn f in a differenzierbar ist, so ist f auch in a stetig.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Man sieht aber sofort, dass

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Also ist f in a stetig. □

Wir stellen nun die wichtigsten Ableitungsregeln zusammen, die Sie in Calculus A gelernt haben.

Satz 5.2 (Ableitungsregeln) (a) (Ableitung von Summen) *Sind f und g in a differenzierbar, so ist auch $f+g$ in a differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(b) (Produktregel) *Sind f und g in a differenzierbar, so ist auch $f \cdot g$ in a differenzierbar und es gilt*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

(c) (Quotientenregel) *Sind f und g in a differenzierbar und ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

(d) (Kettenregel) *Ist g in a differenzierbar und f in $g(a)$, so ist auch $f \circ g$ in a differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

(e) (Ableitung der Umkehrfunktion) *Es sei f eine auf einem Intervall definierte stetige injektive Funktion. Dann besitzt f eine Umkehrfunktion f^{-1}. Wir nehmen an, dass f in $f^{-1}(b)$ differenzierbar ist und dort die Ableitung $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ besitzt. Dann ist f^{-1} in b differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Ist f differenzierbar, so können wir eine neue Funktion f' bilden.

Definition Es sei f eine differenzierbare Funktion, die auf einem Intervall (a, b) definiert ist. Dann heißt f *stetig differenzierbar* gdw. die Funktion f' stetig ist. Ist f' sogar differenzierbar, so sagt man, f ist *zweimal differenzierbar*. Die Ableitung von f' wird dann die *zweite Ableitung* von f genannt und mit f'' bezeichnet. Solange Differenzierbarkeit vorliegt, können wir auch f''' usw. bilden. Die n-te Ableitung schreibt man $f^{(n)}$.

In Tabelle 1 sind die wichtigsten in Calculus A betrachteten Funktionen und ihre Ableitungen zusammengestellt.

Bezeichnung Anstelle der Bezeichnung f' verwendet man auch die auf G. W. Leibniz (1646–1716) zurückgehende Schreibweise

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } \frac{d}{dx} f(x).$$

Table 1: Funktionen aus Calculus A und ihre Ableitungen

f	D	f'
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \neq -1, 1$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \neq -1, 1$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Die Ableitung $f'(a)$ an einer Stelle a drückt sich in dieser Schreibweise wie folgt aus:

$$\frac{dy(a)}{dx}.$$

Die höheren Ableitungen schreiben sich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad \text{usw.}$$

oder

$$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x)]\right], \quad \frac{d^3}{dx^3}[f(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right], \quad \text{usw..}$$

6 Die Bedeutung der Ableitung

Wir wollen in diesem Kapitel diskutieren, inwieweit man aus der Kenntnis der Ableitung Rückschlüsse über die Funktion f ziehen kann.

Zunächst beschäftigen wir uns mit Extremwerten.

Definition Es sei f eine Funktion und A eine Menge von Zahlen, die im Definitionsbereich von f enthalten ist.

Ein Punkt $x \in A$ heißt eine *Maximumstelle* von f auf A gdw.

$$f(y) \leq f(x) \text{ für alle } y \in A.$$

Die Zahl $f(x)$ wird dann ein *Maximum* von f auf A genannt. Man sagt auch, *f nimmt auf A sein Maximum in x an.*

Ein Punkt $x \in A$ heißt eine *Minimumstelle* von f auf A gdw.

$$f(x) \leq f(y) \text{ für alle } y \in A.$$

Die Zahl $f(x)$ wird dann ein *Minimum* von f auf A genannt. Man sagt auch, *f nimmt auf A sein Minimum in x an.*

Definition Es sei f eine Funktion und A eine Menge von Zahlen, die im Definitionsbereich von f enthalten ist. Ein Punkt $x \in A$ heißt eine *lokale Maximumstelle* (*Minimumstelle*) für f auf A gdw. es ein $\delta > 0$ gibt, so dass x eine Maximumstelle (Minimumstelle) für f auf

$$A \cap (x - \delta, x + \delta)$$

ist.

Satz 6.1 (Lokales Extremwertkriterium) *Es sei f eine Funktion, die auf (a, b) definiert ist. Hat f in x eine lokale Maximum- oder Minimumstelle und ist f in x differenzierbar, dann ist $f'(x) = 0$.*

Beweis. Wie betrachten den Fall, dass f eine lokale Maximumstelle in x hat. Es sei $\delta > 0$ so gewählt, dass x eine Maximumstelle für f auf $(x - \delta, x + \delta)$ ist.

Dann gilt für alle h mit $|h| < \delta$

$$f(x + h) \leq f(x),$$

also

$$f(x + h) - f(x) \leq 0.$$

Wenn $h > 0$ ist, gilt daher

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0,$$

also

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Andererseits gilt, wenn $h < 0$ ist,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

also

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Nach Voraussetzung ist f in x differenzierbar. Das bedeutet, dass diese beiden Grenzwerte übereinstimmen und gleich der Ableitung $f'(x)$ in x sein müssen. Es folgt, dass

$$f'(x) \leq 0 \text{ und } f'(x) \geq 0,$$

also $f'(x) = 0$.

Der Beweis für eine lokale Minimumstelle geht analog oder kann auf den anderen Fall zurückgeführt werden (wie?). □

Satz 6.1 liefert ein notwendiges Kriterium für eine lokale Extremstelle: $f'(x) = 0$.

Definition Ein *kritischer Punkt* einer differenzierbaren Funktion f ist eine Zahl x, so dass

$$f'(x) = 0.$$

Der Funktionswert $f(x)$ an einem kritischen Punkt x heißt ein *kritischer* oder *stationärer Wert* von f.

Bei der Extremwertbestimmung geht man also wie folgt vor. Es sei f eine Funktion, die auf $[a,b]$ definiert und auf (a,b) differenzierbar ist. Um die Maxima und Minima von f zu finden, müssen zwei Arten von Punkten betrachtet werden:

(1) die kritischen Punkte von f auf (a,b),

(2) die Randpunkte a und b des Intervalls.

Beispiel 6.1 Wir betrachten die Aufgabe, die Extremwerte der Funktion

$$f(x) = x^3 - x \text{ auf dem Intervall } [-1,2]$$

zu bestimmen. Es gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

die kritischen Punkte sind also $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Beide Punkte liegen in $(-1,2)$, also haben wir als Kandidaten für mögliche Extremstellen

(1) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$,

(2) -1, 2.

Es gilt

$$f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},\; f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},\; f(-1) = 0,\; f(2) = 6.$$

Also nimmt f das Minimum $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ in $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und das Maximum 6 in 2 an.

Wir behandeln nun grundlegende Sätze über differenzierbare Funktionen.

Satz 6.2 (Satz von Rolle) *Es sei f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Gilt $f(a) = f(b)$, dann gibt es eine Zahl $x \in (a,b)$, so dass $f'(x) = 0$.*

Beweis. Da f auf $[a,b]$ stetig ist, nimmt f nach dem Maximum-Minimum-Satz auf $[a,b]$ ein Maximum und ein Minimum an.

Wird das Maximum in einem Punkt $x \in (a,b)$ angenommen, so gilt nach Satz 6.1 $f'(x) = 0$ und wir sind fertig.

Wird das Minimum in einem Punkt $x \in (a,b)$ angenommen, so gilt wieder nach Satz 6.1 $f'(x) = 0$.

Ansonsten werden sowohl Maximum als auch Minimum an den Randpunkten des Intervalls $[a,b]$ angenommen. Da aber nach Voraussetzung $f(a) = f(b)$ ist, sind Maximum und Minimum von f gleich und f ist eine konstante Funktion. Für eine konstante Funktion f gilt aber $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. □

Satz 6.3 (Mittelwertsatz) *Wenn f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) ist, dann gibt es eine Zahl $x \in (a,b)$, so dass*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Es sei

$$h(x) := f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a).$$

Die Funktion h ist stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a), \\ h(b) &= f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(b - a) \;=\; f(a). \end{aligned}$$

Wir können daher den Satz von Rolle auf h anwenden. Aus diesem Satz folgt, dass es ein $x \in (a,b)$ gibt, so dass

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

also

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Korollar 6.1 *Ist f auf einem Intervall definiert und differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle x in dem Intervall, so ist f auf dem Intervall konstant.*

Beweis. Es seien a und b zwei beliebige Punkte des Intervalls mit $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $x \in (a,b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nach Voraussetzung gilt aber $f'(x) = 0$ für alle x in dem Intervall, also

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Daraus folgt aber $f(a) = f(b)$. Da a und b beliebige Punkte des Intervalls mit $a < b$ waren, muß der Wert von f auf je zwei Punkten des Intervalls der gleiche sein, f muß also auf dem Intervall konstant sein. □

Korollar 6.2 *Es seien f und g differenzierbare Funktionen, die auf dem gleichen Intervall definiert sind. Gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle x aus dem Intervall, dann gibt es eine Zahl c, so dass $f = g + c$ gilt.*

Beweis. Man wende Korollar 6.1 auf die Funktion $h := f - g$ an. □

Definition Eine Funktion f wird

(a) auf dem Intervall I als *streng monoton wachsend* bezeichnet gdw. für zwei beliebige Zahlen a, b aus I

$$f(a) < f(b) \quad \text{für } a < b \text{ ist.}$$

(b) auf dem Intervall I als *streng monoton fallend* bezeichnet gdw. für zwei beliebige Zahlen a, b aus I

$$f(a) > f(b) \quad \text{für } a < b \text{ ist.}$$

Korollar 6.3 *Es sei f auf einem Intervall I definiert und differenzierbar.*

(a) *Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton wachsend.*

(b) *Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton fallend.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $f'(x) > 0$. Es seien a und b zwei beliebige Punkte aus I mit $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Da $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Wegen $b - a > 0$ folgt aber $f(b) > f(a)$.

Der Beweis für $f'(x) < 0$ geht analog. □

Satz 6.4 *Es sei f auf einem Intervall I definiert und differenzierbar. Für einen Punkt $a \in I$ gelte $f'(a) = 0$.*

(a) *Ist $f''(a) > 0$, so hat f in a ein lokales Minimum.*

(b) *Ist $f''(a) < 0$, so hat f in a ein lokales Maximum.*

Beweis. Nach Definition gilt

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Da $f'(a) = 0$ gilt, folgt

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Wir nehmen nun an, dass $f''(a) > 0$. Dann muß der Quotient

$$\frac{f'(a+h)}{h}$$

für hinreichend kleines h positiv sein, d.h.

$f'(a+h)$ muß für hinreichend kleines $h > 0$ positiv sein
und $f'(a+h)$ muß für hinreichend kleines $h < 0$ negativ sein.

Nach Korollar 6.3 folgt daraus, dass f auf einem Intervall rechts von a streng monoton wachsend und auf einem Intervall links von a streng monoton fallend sein muß. Also hat f in a ein lokales Minimum.

Der Beweis für den Fall $f''(a) < 0$ verläuft analog. □

Zum Abschluß dieses Abschnittes betrachten wir noch eine Anwendung auf die Grenzwertberechnung. Bei der Bestimmung von Grenzwerten stößt man oft auf Grenzwerte der Form

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Solche Grenzwerte nennt man Grenzwerte vom Typ „$\frac{0}{0}$". Eine wichtige Methode zur Behandlung solcher Grenzwerte gibt der folgende Satz an.

Satz 6.5 (L'Hôpitalsche Regel) *Angenommen*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \textit{ und } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

und $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert. Dann existiert auch* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel 6.2 Nach der Regel von L'Hôpital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

Satz 6.6 (Cauchyscher Mittelwertsatz) *Die Funktionen f und g seien auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Ist g' nirgendwo 0 in (a,b), so gibt es ein $x \in (a,b)$, so dass*
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$
gilt.

Beweis. Da g' in (a,b) keine Nullstelle besitzt, folgt nach dem Satz von Rolle, dass $g(a) \neq g(b)$ ist, d.h. der Nenner in der Behauptung wird nicht Null. Man wende dann den Satz von Rolle auf die Funktion

$$h(x) := f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$$

an. □

Beweis von Satz 6.5.. Die Behauptung ergibt sich wie folgt:

$$\lim_{b\to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{b\to a^+} \frac{f(b)-0}{g(b)-0} \overset{\text{[CMWS]}}{=} \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

7 Folgen

Wir betrachten nun (unendliche) Folgen von Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Dabei stehen die drei Pünktchen für "unendlich oft so weiter".

Bezeichnung Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null, also

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Manchmal nimmt man bei $\mathbb{N}$ die Null auch nicht dazu.

Definition Unter einer *Folge* reeller Zahlen versteht man eine Funktion $n \mapsto a_n$, deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ ist.

Bezeichnung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Bemerkung 7.1 Es spielt im Prinzip keine Rolle, mit welchem Index man beginnt. Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dann bezeichnet man $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$$

auch als Folge.

Beispiel 7.1 (a) Es sei $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die konstante Folge $1, 1, 1, \ldots$.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$, $(n \geq 1)$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

(c)

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases} \quad (n \geq 1): \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \ldots.$$

(d) $a_n = (-1)^n : 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

(e)

$$a_n = \begin{cases} n & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases} \quad (n \geq 1): 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots.$$

(f) Durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{aligned}$$

wird eine Folge rekursiv definiert: $2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots$.

Definition Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* gegen l (in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = l$) gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| < \varepsilon$. Man sagt auch, die Folge *konvergiert* gegen l.

Auch hier ist es wichtig, sich die logische Struktur klarzumachen. Deswegen schreiben wir auch diese Definition noch einmal in Kurzform hin:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Eine andere Formulierung: Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ gdw. in jeder ε-Umgebung ($\varepsilon > 0$) von l liegen fast alle Glieder der Folge. Hierbei nennt man das Intervall

$$(l-\varepsilon, l+\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-l| < \varepsilon\}$$

eine *ε-Umgebung* von l. *Fast alle* bedeutet alle bis auf endlich viele.

Definition Eine Folge heißt *divergent* gdw. sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Wir untersuchen nun die Beispiele auf Konvergenz bzw. Divergenz.
Beispiel 7.1 (a): Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
Beispiel 7.1 (b): Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Eine solche Zahl existiert nach Satz 4.5. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Beispiel 7.1 (c): Es gilt ebenfalls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Beispiel 7.1 (d): Wir zeigen, dass die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist. Dazu ist zu zeigen, dass sie gegen kein $l \in \mathbb{R}$ konvergiert. Es sei $l \in \mathbb{R}$. Setze $\varepsilon := 1$. Ist $l \geq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben, so gilt für ungerade n mit $n \geq N$

$$|a_n - l| = |-1-l| = 1 + l \geq 1.$$

Ist $l < 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben, so gilt für gerade n mit $n \geq N$

$$|a_n - l| = |1-l| = 1 + (-l) > 1.$$

Bevor wir die anderen Beispiele untersuchen, notieren wir einige einfache Sätze, deren Beweis analog zu den Beweisen der entsprechenden Sätze aus Abschnitt 1 ist.

Satz 7.1 (Eindeutigkeit des Grenzwertes) *Gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = m$, *so gilt* $l = m$.

Satz 7.2 (Rechenregeln für Grenzwerte) *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ *ist, so gilt*

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = l + m$,

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot m$.

Wenn $m \neq 0$, *dann gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $n \geq N$ *gilt* $b_n \neq 0$, *und die Folge* $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq N}$ *ist konvergent und*

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l}{m}$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir betrachten

$$|a_n b_n - lm| = |a_n b_n - a_n m + a_n m - lm| \leq |a_n||b_n - m| + |m||a_n - l|.$$

Es gibt zunächst ein N_1, so dass für alle $n \geq N_1$ gilt

$$|a_n - l| < 1,$$

also

$$|a_n| \leq |l|| + |a_n - l| < |l| + 1.$$

Damit gilt für $n \geq N_1$:

$$z|a_n b_n - lm| \leq |b_n - m|(|l| + 1) + |m||a_n - l|. \tag{3}$$

Wir sehen

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)},\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1|)}.$$

Dann gibt es N_2, N_3, so dass gilt

$$\begin{array}{lcccl} |a_n - l| & < & \varepsilon_1 & \text{für} & n \geq N_2 \\ |b_n - m| & < & \varepsilon_2 & \text{für} & n \geq N_3. \end{array}$$

Schließlich sei $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Dann folgt aus (3) für $n \geq N$

$$|a_n b_n - lm| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Satz 7.3 *Es sei* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ *und* $a_n \leq b_n$ *für fast alle* n. *Dann gilt* $l \leq m$.

Beweis. Angenommen, $m < l$. Dann ist $\varepsilon := \frac{l-m}{2} > 0$ und es gibt $N, M \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{array}{rcl} |a_n - l| & < & \varepsilon \text{ für } n \geq N \\ |b_n - m| & < & \varepsilon \text{ für } n \geq M \end{array}$$

Für $n \geq \max\{N, M\}$ gilt dann

$$a_n > l - \varepsilon \text{ und } b_n < m + \varepsilon.$$

Wegen $l - \varepsilon = m + \varepsilon$ folgt daraus aber $b_n < a_n$, ein Widerspruch. □

Satz 7.4 (Einzwängungssatz) *Für fast alle* n *gelte*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *und* $\lim_{n\to\infty} c_n = l$, *so gilt auch* $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. In der ε-Umgebung von l liegen fast alle Glieder der Folgen (a_n) und (c_n). Wegen $a_n \leq b_n \leq c_n$ gilt dasselbe für die Folge b_n. □

Definition Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- *monoton wachsend* gdw. $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *monoton fallend* gdw. $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *nach oben beschränkt* gdw. es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *nach unten beschränkt* gdw. es eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $m \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *beschränkt* gdw. sie nach oben und unten beschränkt ist.

Satz 7.5 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Dann gibt (vgl. den Beweis von Satz 7.2) es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n| < |l| + 1.$$

Es sei

$$M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |l| + 1\}.$$

Dann gilt

$$|a_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Bemerkung 7.2 Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, siehe Beispiel 7.1 (d).

Beispiel 7.1 (e): Wegen $a_n = n$ für n ungerade ist die Folge nicht beschränkt, also nicht konvergent.

Satz 7.6 (Ein Konvergenzkriterium) *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.*

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Es sei

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist A nicht leer und nach oben beschränkt, besitzt also nach dem Supremumsaxiom ein Supremum α.

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq \alpha,$$

denn sonst wäre α nicht die kleinste obere Schranke von A. Da (a_n) monoton wachsend ist, gilt also für alle $n \geq N$

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha,$$

also $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. □

Beispiel 7.2 Jeder Dezimalbruch, z.B.

$$0,\overline{9} = 0,99999999999999999999\ldots,$$

stellt eine reelle Zahl dar: Die Folge

$$0; 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999; \ldots$$

ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, konvergiert also nach Satz 7.6. Der Dezimalbruch bezeichnet gerade den Grenzwert dieser Folge. In unserem Beispiel ist das die Zahl 1. Also stellt der unendliche periodische Dezimalbruch $0,\overline{9}$ die Zahl 1 dar.

Beispiel 7.1 (f): Es gilt nach der Ungleichung zwischen den geometrischen und dem arithmetischen Mittel

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Somit ist $\sqrt{2}$ eine untere Schranke der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also gilt

$$\begin{aligned} & a_n \geq \sqrt{2} \\ \Rightarrow\quad & a_n^2 \geq 2 \\ \Rightarrow\quad & \frac{2}{a_n} \leq a_n \\ \Rightarrow\quad & a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq a_n \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent nach Satz 7.6. Es sei $l = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir berechnen l.

Es gilt $a_n \geq \sqrt{2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also folgt aus Satz 7.3 $l > 0$. Nach Satz 7.2 gilt somit

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right).$$

Daraus folgt aber $l = \sqrt{2}$. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Damit haben wir erneut ein Iterationsverfahren gefunden, $\sqrt{2}$ approximativ zu berechnen.

Definition Eine *Teilfolge* einer Folge (a_n) ist eine Folge der Form

$$a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots,$$

wobei die n_j natürliche Zahlen mit

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

sind.

Lemma 7.1 *Jede Folge (a_n) besitzt eine Teilfolge, die entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.*

Beweis. Wir nennen eine natürliche Zahl n einen "Gipfel" der Folge (a_n), wenn $a_m < a_n$ für alle $m > n$ gilt.

Fall 1. Die Folge hat unendlich viele Gipfel. Wenn $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ die Gipfel sind, so gilt $a_{n_0} > a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots$ und $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ ist eine monoton fallende Teilfolge von (a_n).

Fall 2. Die Folge hat nur endlich viele Gipfel. In diesem Fall sei n_0 größer als alle Gipfel. Da n_0 kein Gipfel ist, gibt es eine natürliche Zahl n_1 mit $n_1 > n_0$ und $a_{n_1} \geq a_{n_0}$. Da n_1 kein Gipfel ist (n_1 ist größer als n_0 und damit größer als alle Gipfel), gibt es ein $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Fahren wir auf diese Weise fort, so erhalten wir eine monoton wachsende Teilfolge $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ von (a_n). □

Korollar 7.1 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Definition Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine *Cauchyfolge* gdw. es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle m, n mit $m, n \geq N$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Satz 7.7 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst: Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen l konvergiert, so kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für jedes $n \geq N$ gilt: $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wenn nun $n \geq$ und $m \geq N$ ist, so gilt

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Wir zeigen nun den schwierigeren Teil: Jede Cauchyfolge ist konvergent.

Dazu zeigen wir, dass jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dazu wählen wir $\varepsilon = 1$ in der Definition einer Cauchyfolge. Dann gibt es ein N so dass für alle $m, n \geq N$ gilt

$$|a_m - a_n| < 1.$$

Dies gilt z.B. auch für $n = N$ und $m \geq N$:

$$|a_m - a_N| < 1.$$

Das besagt gerade, dass sich für fast alle m (für alle $m \geq N$) a_m um weniger als 1 von a_N unterscheidet. Die endlich vielen Ausnahmen stören die Beschränktheit nicht. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß konvergiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Noch zu zeigen ist: Wenn eine Teilfolge einer Cauchyfolge konvergiert, dann konvergiert die ganze Folge. Es sei hierzu $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert l, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen N mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n, m \geq N.$$

Dann gibt es ein $n_{k_0} \geq N$ mit $|a_{n_{k_0}} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also gilt für alle $n \geq N$

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Verfolgt man die Beweiskette zurück, so sieht man, das wir das Cauchysche Konvergenzkriterium aus dem Supremumsaxiom abgeleitet haben. Tatsächlich kann man anstelle des Supremumsaxioms auch das folgende Axiom in das Axiomensystem der reellen Zahlen aufnehmen und das Supremumsaxiom daraus ableiten.

Axiom (Das Vollständigkeitsaxiom) *Jede Cauchyfolge reeller Zahlen konvergiert in $\mathbb{R}$.*

Dieses Axiom gilt wieder nicht über $\mathbb{Q}$: Die Folge aus Beispiel 7.1 (f) ist eine Folge rationaler Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, also eine Cauchyfolge. Sie konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$.

Zum Abschluß stellen wir noch den Zusammenhang zum Grenzwertbegriff für Funktionen her.

Satz 7.8 (Folgencharakterisierung des Grenzwertes) *Es sei f eine Funktion, die auf einem offenen Intervall, das den Punkt c enthält, aber eventuell nicht im Punkt c definiert ist, mit*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l.$$

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit den folgenden Eigenschaften:

(a) *Jedes a_n liegt im Definitionsbereich von f.*

(b) *Jedes a_n ist von c verschieden.*

(c) $\lim_{n \to \infty} a_n = c$.

Dann gilt für die Folge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l.$$

Gilt dies umgekehrt für jede *Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den obigen Eigenschaften, dann gilt $\lim_{x \to c} f(x) = l$.*

Beweis. (a) Wir nehmen zunächst an, dass $\lim_{x \to c} f(x) = l$ gilt. Das bedeutet, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x gilt

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Konvergiert nun die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen c, so gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|a_n - c| < \delta.$$

Nach unser Wahl von δ folgt aber daraus

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$.

(b) Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ gilt. Angenommen, es gilt *nicht* $\lim_{x\to c} f(x) = l$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für *jedes* $\delta > 0$ ein x gibt mit

$$0 < |x - c| < \delta \text{ aber } |f(x) - l| > \varepsilon.$$

Insbesondere gibt es für jedes n ein x_n mit

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n) - l| > \varepsilon.$$

Das bedeutet aber, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert, aber die Folge $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen l konvergiert, ein Widerspruch. □

Beispiel 7.3 Es sei q eine reelle Zahl. Wir betrachten die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es sei zunächst $0 < q < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Um dies zu zeigen, benutzen wir die Funktion $f(x) = q^x = e^{x\ln q}$. Da $\ln q < 0$ ist, gilt

$$\lim_{x\to\infty} q^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln q} = 0.$$

Nach den gleichen Argumenten wie bei dem Beweis von Satz 7.8 folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Tatsächlich gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ falls } |q| < 1,$$

denn für $-1 < q < 0$ können wir schreiben:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n |q|^n = 0.$$

Für $q = 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 1.$$

Schließlich folgt aus den obigen Argumenten, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $q > 1$ und $q \leq -1$ divergiert.

8 Reihen

Wenn man eine Folge gegeben hat, so kann man auch versuchen, eine "Summe"

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

zu bilden. Wir wollen nun erklären, was wir darunter verstehen wollen. Zunächst kann man die "Partialsummen"

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

betrachten. Konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so kann man den Grenzwert als die "unendliche Summe"

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

betrachten.

Definition Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Durch

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (\textit{Partialsumme})$$

wird eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert, die *Reihe* genannt wird und mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet wird.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Man sagt auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert.* Den Grenzwert nennt man auch die *Summe* oder den *Wert* der Reihe.

Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedeutet also

(a) die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

(b) im Falle der Konvergenz den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Beispiel 8.1 Das wichtigste Beispiel einer Reihe ist die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

für $q \in \mathbb{R}$. Die Partialsumme ist

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n.$$

Für $q = 1$ erhält man

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1} = n + 1.$$

Für $q = 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ daher nicht.

Es sei $q \neq 1$. Zieht man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ qs_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

voneinander ab, so erhält man

$$(1-q)s_n = 1 - q^{n+1}.$$

Für $q \neq 1$ gilt also

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Wir sehen also, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Nach Beispiel 7.3 konvergiert die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, und es gilt für $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Also folgt für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Wir erhalten also die sehr wichtige *Summenformel für die geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Insbesondere gilt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Man leitet leicht die folgenden Rechenregeln für Werte von Reihen ab.

Satz 8.1 (Rechenregeln für Summen von Reihen) (1) *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergent, so ist auch* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ *konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

(2) *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent und* $c \in \mathbb{R}$, *so ist auch* $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k$ *konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Wir behandeln nun Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz 8.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn gilt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $n \geq m \geq N$ *gilt:*

$$|a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Beweis. Es gilt

$$s_n - s_{m-1} = a_m + \cdots a_n.$$

Die angegebene Bedingung bedeutet also gerade, dass die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Nach Satz 7.7 ist aber $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. □

Korollar 8.1 *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Beweis. Man nehme im Cauchyschen Konvergenzkriterium $m = n$. □

Bemerkung 8.1 Die Umkehrung von Korollar 8.1 gilt *nicht*, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 8.2 Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergiert nicht, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} + \cdots .$$

Man findet also eine Teilfolge der Partialsummenfolge, die nicht beschränkt ist und daher nicht konvergiert.

Wir betrachten nun Kriterien für Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle k. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine solche Reihe, so ist die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Aus Satz 7.6 erhalten wir damit das folgende Kriterium.

Satz 8.3 (Beschränkheitskriterium) *Eine Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *mit* $a_k \geq 0$ *konvergiert genau dann, wenn die Partialsummenfolge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist.*

Das folgende Kriterium ist grundlegend für weitere Kriterien.

Satz 8.4 (Majorantenkriterium) *Es gelte*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \textit{für alle } n.$$

Dann gilt: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergiert, so konvergiert auch* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*. (Man nennt dann* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Majorante *von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.)*

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + \cdots + a_n, \\ t_n &= b_0 + \cdots + b_n. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$0 \leq s_n \leq t_n \quad \text{für alle } n.$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, ist die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Daher ist auch die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach dem Beschränkheitskriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

Satz 8.5 (Quotientenkriterium) *Es sei $a_n > 0$ für alle n und es gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Gilt $r < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Gilt $r > 1$, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $r < 1$ ist. Wähle eine Zahl q mit $r < q < 1$. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1.$$

Daher gibt es eine natürliche Zahl N, so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{für } n \geq N.$$

Das kann man so schreiben:

$$a_{n+1} \leq q a_n \quad \text{für } n \geq N.$$

Also

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq q a_N, \\ a_{N+2} &\leq q a_{N+1} \leq q^2 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq q^k a_N. \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_N q^k = a_N \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

konvergiert, folgt nach dem Majorantenkriterium, dass auch

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

konvergiert. Da sich diese Reihe nur um endlich viele Glieder von der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ unterscheidet, folgt auch die Konvergenz dieser Reihe.

Nun sei $r > 1$. Ist $1 < q < r$, dann gibt es eine Zahl N, so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wie oben folgt

$$a_{N+k} \geq a_N q^k \geq a_N \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dies bedeutet, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert. Nach Korollar 8.1 ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ daher divergent. □

Beispiel 8.3 Wir zeigen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Satz 8.6 (Wurzelkriterium) *Es sei $a_n \geq 0$ für alle n und es gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Gilt $r < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Gilt $r > 1$, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis des Quotientenkriteriums durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Wir betrachten nur den Fall $r < 1$. Dann gibt es eine Zahl q mit $r < q < 1$. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1.$$

Daher gibt es eine natürliche Zahl N, so dass

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \text{für } n \geq N.$$

Dann gilt aber

$$a_n \leq q^n \quad \text{für } n \geq N.$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt wieder, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. □

Beispiel 8.4 Wir zeigen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n}.$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$$

und die Konvergenz der Reihe folgt aus dem Wurzelkriterium.

Wir haben bisher Kriterien für Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit nicht-negativen Gliedern a_n betrachtet. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit sowohl positiven als auch negativen Gliedern, so kann man stattdessen auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ betrachten, die lauter nicht-negative Glieder besitzt.

Definition Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent* gdw. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Quotienten-, Wurzel- und Integralkriterium liefern daher auch Kriterien für absolute Konvergenz.

Satz 8.7 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent, so gibt es nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt:

$$|a_m| + \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann aber erst recht auch

$$|a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

□

Definition Reihen, bei denen aufeinanderfolgende Glieder jeweils entgegengesetzte Vorzeichen haben, nennt man *alternierende Reihen*.

Satz 8.8 (Leibniz-Kriterium) *Es sei*

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$$

und es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots .$$

Beweis. Man zeigt leicht die folgenden Ungleichungen zwischen den Partialsummen

(1) $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots,$

(2) $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots,$

(3) $s_k \leq s_l$ falls k ungerade und l gerade.

Das bedeutet, dass das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ wie in Abb. 9 dargestellt aussieht. Insbesondere konvergieren die Teilfolgen (s_{2n}) und (s_{2n+1}). Wegen

$$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \text{ und } \lim a_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

haben beide Teilfolgen denselben Grenzwert und damit folgt die Behauptung.
□

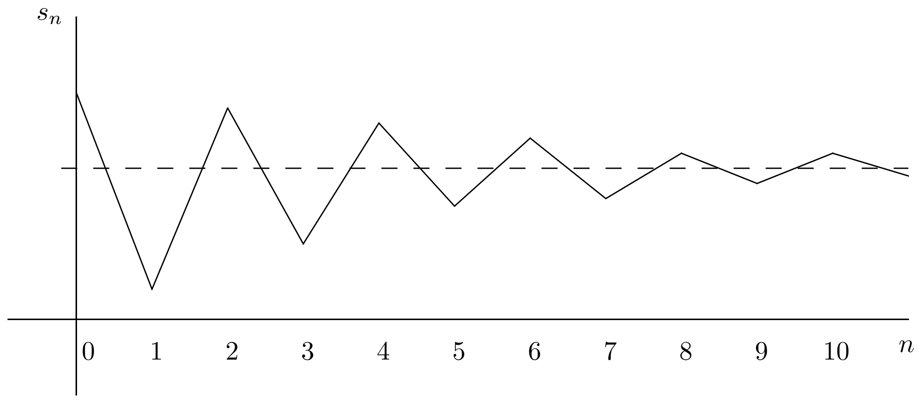

Figure 9: Partialsummen einer alternierenden Reihe

Beispiel 8.5 Aus dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert. Diese Reihe ist aber nicht absolut konvergent, da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

die harmonische Reihe ist, von der wir wissen, dass sie divergent ist. Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Umkehrung von Satz 8.7 nicht gilt.

Eine Summe von endlich vielen Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge. Bei einer Reihe kann jedoch das Umordnen der Glieder zu seltsamen Resultaten führen.

Beispiel 8.6 Wir betrachten wieder die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert diese Reihe gegen eine Zahl a. Nach dem Beweis des Leibnizkriteriums gilt

$$s_2 = \frac{1}{2} \leq a \leq s_1 = 1.$$

Wir ordnen nun die Reihe um:

$$
\begin{aligned}
a &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\
&\quad \text{(auf ein positives Glied folgen stets zwei negative Glieder)} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}a.
\end{aligned}
$$

Es gilt also $a = \frac{1}{2}a$, und es folgt $a = 0$, ein Widerspruch. Man kann übrigens durch Umordnen erreichen, daß die Reihe gegen einen beliebig vorgegebenen Wert konvergiert.

Bemerkung 8.2 Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \ln 2.$$

Für absolut konvergente Reihen gilt aber der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 8.9 (Umordnungssatz) *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann ist auch jede Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ($\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung) von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

9 Potenzreihen

Definition Es sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine relle Zahl x_0 gegeben. Ferner sei x eine beliebige relle Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Potenzreihe mit den Koeffizienten a_n und dem Entwicklungspunkt x_0.

Die wichtigste Frage ist nun, für welche x die Reihe konvergiert. Dazu genügt es, den Spezialfall $x_0 = 0$ zu betrachten. Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 hat die Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Satz 9.1 *Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = x_1 \neq 0$ konvergiert, so konvergiert sie für jedes x mit $|x| < |x_1|$ sogar absolut.*

Beweis. Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

konvergiert, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$, also ist die Folge $(a_n x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es gibt also eine Zahl M, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n x_1^n| \leq M.$$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n \text{ mit } q = \left|\frac{x}{x_1}\right|$$

ist also eine Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. □

Definition Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe. Dann heißt

$$\rho := \sup\{r \mid r \geq 0 \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ konvergent}\}$$

(falls das Supremum existiert, andernfalls setzen wir $\rho := \infty$) der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

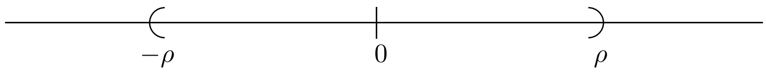

Figure 10: Der Konvergenzradius einer Potenzreihe

Beispiel 9.1 (a) Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

ist $\rho = 0$, denn die Potenzreihe konvergiert für kein $x \neq 0$, da die Quotienten

$$\frac{(n+1)!(x^{n+1})}{n! x^n} = (n+1)x$$

unbeschränkt wachsen.

(b) Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ist $\rho = 1$.

(c) Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

ist $\rho = \infty$, denn die Potenzreihe konvergiert absolut für jedes x nach dem Quotientenkriterium: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Satz 9.2 *Ist $|x| < \rho$, d.h. $x \in (-\rho, \rho)$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent.*

Ist $|x| > \rho$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent.

Beweis. Ist $|x| < \rho$, so gibt es — weil x nicht das Supremum der obengenannten Menge ist — ein r, so dass $|x| < r \leq \rho$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konvergiert. Nach Satz 9.1 konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut.

Ist hingegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für ein x mit $|x| > \rho$, so gibt es ein r mit $|x| > r > \rho$, für das $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergiert. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass ρ das Supremum der obengenannten Menge ist. □

Bemerkung 9.1 Ist $0 < \rho < \infty$, so werden über $x = \pm\rho$ keine Aussagen gemacht. Das größte Intervall, auf dem eine Potenzreihe konvergiert, nennt man das *Konvergenzintervall.* Ist $\rho = \infty$, so ist das Konvergenzintervall das Intervall $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Ist $\rho = 0$, so reduziert sich das Konvergenzintervall auf den Punkt $\{0\}$. Bei einer Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, kann das Konvergenzintervall das Intervall $(-\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho)$ oder $[-\rho, \rho]$ sein. Für $x = \pm\rho$ ist also sowohl Divergenz als auch Konvergenz möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 9.2 (a) Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ist $\rho = 1$. Für $x = \pm 1$ divergiert die Reihe. Also ist das Konvergenzintervall das Intervall $(-1, -1)$.

(b) Wir zeigen, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$\rho = 1$ ist. Dazu betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$$

und wenden das Quotientenkriterium an. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|x|^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|x|}{n+1} = |x|.$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass die Potenzreihe nur für $|x| < 1$ absolut konvergent ist. Aus Satz 9.2 folgt $\rho = 1$. Für $x = 1$ konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium. Für $x = -1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die divergent ist. Also ist das Konvergenzintervall das Intervall $(-1, 1]$.

(c) Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

Wie bei Beispiel (b) kann man zeigen, dass der Konvergenzradius $\rho = 1$ ist. Die Reihe konvergiert für $x = 1$ und auch für $x = -1$. Also ist das Konvergenzintervall das Intervall $[-1, 1]$.

Taylorreihen

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I = (a, b)$ beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$.

Definition Die Taylorreihe von f im Punkt x_0 ist

$$T_{x_0} f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Beispiel 9.3

(1) $f(x) = e^x$:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(2) $f(x) = \sin x$:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

(3) $f(x) = \cos x$:

$$T_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots.$$

(4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Man beachte, dass diese Reihe im Punkt $x = -1$ divergent ist, obwohl $f(-1) = \frac{1}{2}$ wohldefiniert ist.

(5) $f(x) = \ln(1 + x)$:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

(6) $f(x) = \arctan x$:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots.$$

Man entwickelt eine Funktion in ihre Taylorreihe, um sie durch endliche Teile dieser Reihe zu approximieren. Man beachte aber, dass die Taylorreihe nicht im gesamten Definitionsbereich konvergieren muss. Es kann auch vorkommen, dass der Konvergenzradius $\rho = 0$ ist, oder aber, dass die Taylorreihe überall konvergiert, aber nur im Entwicklungspunkt mit der Funktion f übereinstimmt. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

In diesem Fall gilt

$$T_0 f(x) \equiv 0.$$

Schließlich halten wir noch folgenden Satz fest:

Satz 9.3 *Es sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$. *Dann ist* $f(x)$ *in dem Intervall* $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *beliebig oft differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Insbesondere konvergiert diese Reihe im Intervall $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *absolut.*