

Funktionentheorie A

K. Hulek

§ 1 Holomorphe Funktionen

Die wichtigsten Objekte dieser Vorlesung sind die holomorphen Funktionen.

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung und $z_0 \in U$ ein Punkt.

Definition (i) Die Funktion f heißt im Punkt z_0 *komplex differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Dann heißt $f'(z_0)$ die (komplexe) *Ableitung* von f im Punkt z_0 .

(ii) Die Funktion f heißt *holomorph*, falls f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist, und falls die Abbildung

$$f' : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z_0 \mapsto f'(z_0)$$

stetig ist.

Bemerkung Holomorphe Funktionen sind also das Analogon zu C^1 -Funktionen im Reellen. Später werden wir sehen, daß die Stetigkeit der Ableitung aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt. Hier liegt ein großer Unterschied zwischen dem Reellen und dem Komplexen vor.

Satz 1.1 *Es seien f und g holomorphe Funktionen.*

(i) *Dann sind auch $f + g$ und fg holomorph. Es gilt*

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

(ii) *Ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, so ist auch f/g holomorph, und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Beweis. Wörtlich wie im reellen Fall. □

Beispiel (i) $f(z) = z$, $f'(z) = 1$

(ii) Polynome $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$ sind stets holomorphe Funktionen mit Ableitung $P'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$.

Satz 1.2 *Es seien $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es gilt die Kettenregel*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Beweis. Wörtlich wie im reellen Fall. □

Die wichtigsten nicht-trivialen Beispiele für holomorphe Funktionen sind *konvergente Potenzreihen*. Wir betrachten zunächst Potenzreihen um den Ursprung:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Es sei ρ der *Konvergenzradius* dieser Potenzreihe und

$$U := \{z \in \mathbb{C}; |z| < \rho\}.$$

Dann ist (vgl. die Analysisvorlesung)

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

stetig. Außerdem besitzt die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (\text{formale Ableitung})$$

ebenfalls den Konvergenzradius ρ und ist auf U stetig.

Satz 1.3 *Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph mit Ableitung*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Beweis. Wir haben zu zeigen: Ist $z \in U$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon \quad \text{für } |h| < \delta.$$

Das heißt, daß wir den folgenden Ausdruck abschätzen müssen:

$$\left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|.$$

Wir betrachten dazu

$$\begin{aligned} \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^k |z|^{n-k} \\ &= \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \right) |h| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n(n-1) (|h| + |z|)^{n-2} |h|. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da sich die Binomialkoeffizienten bei $|h|^{k-2}|z|^{n-k}$ wie folgt vergleichen:

$$LS : \binom{n}{k}, \quad RS : n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = k(k-1) \binom{n}{k} \geq \binom{n}{k}.$$

Also gilt:

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (|h| + |z|)^{n-2}.$$

Dies führt uns dazu, die zweite formale Ableitung von f , nämlich

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}.$$

zu betrachten. Der Konvergenzradius ist wieder ρ . Wie wählen nun ein $r > 0$ mit $|z| < r < \rho$. Dann gibt es wegen der absoluten Konvergenz der zweiten formalen Ableitung ein N , so daß

$$(**) \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n(n-1) |a_n| r^{n-2} \right| r < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits ist $\sum_{n=0}^N a_n z^n$ ein komplexes Polynom, also holomorph. mit Ableitung $\sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1}$. Nun wähle man $\delta > 0$ so klein, daß

- (i) $|h| + |z| < r$ für $|h| < \delta$
- (ii) $\left| \sum_{n=0}^N a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|h| < \delta$.

Dann gilt für $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1} \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n(n-1)(|h| + |z|)^{n-2} \right| |h| < \varepsilon.$$

Hierbei folgt das erste Ungleichheitszeichen aus der Dreiecksungleichung, das zweite aus (ii) und (*) und die letzte Ungleichung schließlich aus (i) (womit auch $|h| < r$ folgt) und (**). \square

Korollar 1.4 Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ habe Konvergenzradius ρ . Dann ist f auf $U = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \rho\}$ holomorph mit Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

Beweis. Dies folgt sofort durch Anwendung der Translation $z \mapsto z + z_0$. \square

Beispiel (1) Die Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad (e^z)' = e^z \quad (z \in \mathbb{C}).$$

(2) Sinus und Cosinus, deren Reihenentwicklung aus der Analysis bekannt sind:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; & \sin' z &= \cos z \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; & \cos' z &= -\sin z. \end{aligned}$$

Definition Eine Funktion f , die auf ganz \mathbb{C} definiert und dort holomorph ist, heißt auch *ganze* Funktion.

§ 2 Geometrische Deutung

Wir betrachten den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy. \end{aligned}$$

Ferner betrachten wir für festes $z_0 \in \mathbb{C}$ die \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z_0 z. \end{aligned}$$

Wir wollen die lineare Abbildung, die durch Multiplikation mit z_0 gegeben wird, genauer verstehen. Es sei $z_0 = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Unter dem Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ liefert die Multiplikation mit z_0 eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h. man hat ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\cdot z_0} & \mathbb{C}. \end{array}$$

Es gilt für $z = x + iy$, daß

$$z = (x + iy) \mapsto z_0 z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Das heißt also, daß bezüglich der kanonischen Basis von \mathbb{R}^2 die lineare Abbildung φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Man kann diese Matrix auch wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $|z_0| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und die verbleibende Matrix hat Determinante 1. Man prüft sofort nach, daß dies ein Element der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(2)$ ist. Anders ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

wobei $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Der Zusammenhang mit der Zahl z_0 ist, daß $z_0 = r e^{i\varphi}$. Das heißt also, daß die Multiplikation mit z_0 einer "Drehsteckung" entspricht.

Wir betrachten nun eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und hierauf eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, die wir als komplexe Funktion oder aber als reelle Abbildung auffassen können. Wir können diese in der Form

$$f = u + iv; \quad u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$$

schreiben. Dann nennt man u den *Realteil*, und v heißt der *Imaginärteil* der Funktion f . Als Abbildung nach \mathbb{R}^2 haben wir $f = (u, v)$.

Bekanntlich heißt die Funktion f (*total*) *differenzierbar* im Punkt $z_0 \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, mit

$$f(z_0 + \xi) = f(z_0) + A\xi + \varphi(\xi)$$

mit $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} = 0$. D.h., daß die Funktion f im Punkt z_0 *linear approximierbar* ist. Die lineare Abbildung A wird durch eine Matrix $Df(z_0)$ dargestellt,

die das *Differential* von f im Punkt z_0 heißt. Ist $f = (u, v)$ stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$Df = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}.$$

Satz 2.1 Die Funktion f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar wenn f in z_0 (total) reell differenzierbar ist und $Df(z_0)$ eine Drehstreckung ist, d.h. durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl gegeben wird. Dies ist dann die (komplexe) Ableitung $f'(z_0)$.

Beweis. „ \Rightarrow “ Es sei

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

also

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \varphi(h)$$

wobei $\varphi(h)$ durch diese Gleichung definiert wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{|h|} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right) \left(\frac{h}{|h|} \right) = 0. \end{aligned}$$

(Hierbei verwenden wir, daß $h/|h|$ beschränkt ist.) Dies zeigt, daß f reell total differenzierbar ist, und daß die approximierende lineare Abbildung gerade durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(z_0)$ gegeben wird.

„ \Leftarrow “ Es sei umgekehrt $Df(z_0)$ durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gilt

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + wh + \varphi(h)$$

also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = w + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = w + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} \frac{|h|}{h} = w$$

also ist f komplex differenzierbar. □

Korollar 2.2 Die Funktion f ist genau dann holomorph wenn f stetig reell differenzierbar ist und wenn zusätzlich gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Definition Diese Gleichungen heißen die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*.

Beweis. Das totale Differential der Abbildung f wird durch die folgende Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}$$

Nun ist f genau dann holomorph, wenn dies in jedem Punkt von der Form

$$\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist, also wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gilt. □

Definition Eine reelle Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn

$$\Delta g := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)(g) = 0.$$

Der Operator Δ heißt der *Laplace - Operator*.

Korollar 2.3 *Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und zweimal stetig differenzierbar, so sind Real- und Imaginärteil von f harmonische Funktionen.*

Bemerkung Wir werden später sehen, daß die Voraussetzung zweimal stetig differenzierbar überflüssig ist.

Beweis. Zunächst folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Da f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

d.h. u ist harmonisch. Die Aussage für v beweist man analog. □

Definition Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *konforme* Abbildung, falls f holomorph und $f'(z_0) \neq 0$ ist für alle $z_0 \in U$.

Die Interpretation dieses Begriffes ist die folgende: die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar, und in jedem Punkt ist $Df(z_0)$ eine *Drehstreckung*, d.h. orientierungs- und winkelerhaltend.

Wirtinger Kalkül

Definition Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *\mathbb{C} -antilinear*, falls für alle $z_1, z_2, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(\lambda z_1 + \mu z_2) = \bar{\lambda}f(z_1) + \bar{\mu}f(z_2).$$

Bemerkung Jede \mathbb{C} -antilineare Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist von der Form $f(z) = a\bar{z}$ für ein festes $a \in \mathbb{C}$. (Dies folgt, da $f(z) = f(z \cdot 1) = \bar{z}f(1)$ gilt.)

Satz 2.4 Jede \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

läßt sich auf genau eine Weise als Summe einer \mathbb{C} -linearen und einer \mathbb{C} -antilinearen Abbildung schreiben, d.h. zu A gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, so daß für alle $z \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ gilt

$$Az = A_1z + A_2\bar{z}.$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß die Abbildung $z \mapsto A_1z + A_2\bar{z}$ \mathbb{R} -linear ist, da für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$A_1\lambda z + A_2\overline{\lambda z} = A_1\lambda z + A_2\lambda\bar{z} = \lambda(A_1z + A_2\bar{z}).$$

Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird durch die Werte auf einer Basis festgelegt, etwa auf $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} A1 &= (a, c) = a + ic \\ Ai &= (b, d) = b + id. \end{aligned}$$

Dies ergibt die Beziehungen

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= a + ic \\ i(A_1 - A_2) &= b + id, \end{aligned}$$

also nach Auflöfung des linearen Gleichungssystems

$$A_1 = \frac{a+d}{2} + i\frac{c-b}{2}, \quad A_2 = \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2}.$$

□

Bemerkung Die Abbildung A ist offenbar genau dann \mathbb{C} -linear, wenn gilt $A_2 = 0$.

Wir können nun die reelle Differenzierbarkeit anders beschreiben.

Satz 2.5 Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in U$ genau dann reell differenzierbar, wenn es $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ und eine in z_0 stetige Funktion $r : U \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so daß $r(z_0) = 0$ und für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + A_1(z - z_0) + A_2(\bar{z} - \bar{z}_0) + r(z)|z - z_0|.$$

Definition Man setzt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := A_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := A_2,$$

und nennt dies die *Wirtingerableitungen* von f im Punkt z_0 .

Mit Hilfe der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

ergibt sich dann aus dem Beweis von Satz 2.4, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{u_x + v_y}{2} + i \frac{v_x - u_y}{2} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{u_x - v_y}{2} + i \frac{v_x + u_y}{2} = \frac{1}{2}(f_x + if_y). \end{aligned}$$

Bemerkung Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen sind demnach äquivalent zu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Wir können dies so zusammenfassen:

Satz 2.6 Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

- (i) f ist in z_0 komplex differenzierbar,
- (ii) f ist in z_0 reell stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Bemerkung Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right).$$

§ 3 Der Cauchysche Integralsatz

Die in der Funktionentheorie meist vorkommenden Integrale (insbesondere im Cauchyschen Integralsatz) sind „Kurvenintegrale“ und wie folgt definiert:

Definition Sei $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$ eine 1-mal stetig differenzierbare Kurve. Dann definieren wir:

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Ist γ nur stückweise stetig differenzierbar, d.h. $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$ ist stetig und es gibt $t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_n = t_1$, so daß $\gamma_i := \gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ jeweils C^1 , d.h. stetig differenzierbar ist, dann setzt man

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Beispiel (1) Wir betrachten die Funktion $f(z) = z$ und den Weg

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{2\pi i t}. \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um den im mathematisch positiven Sinn durchlaufenen Einheitskreis. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 e^{2\pi i t} 2\pi i e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 e^{4\pi i t} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 (\cos 4\pi t + i \sin 4\pi t) dt = 0. \end{aligned}$$

(2) Für die Funktion $f(z) = 1/z$ ergibt sich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 e^{-2\pi i t} 2\pi i e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i.$$

(3) Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg mit Anfangspunkt $\gamma(0) = a$ und Endpunkt $\gamma(1) = b$ und besitzt die Funktion $f(z)$ auf U die Stammfunktion $F(z)$, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(b) - F(a),$$

da nämlich

$$(F(\gamma(t)))' = F'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Man kann den Cauchyschen Integralsatz auf den Satz von Stokes zurückführen. Ich möchte jedoch in dieser Vorlesung den elementaren Beweis von Goursat geben. Damit kann man später auch schließen, daß eine komplex differenzierbare Funktion bereits holomorph ist. In seiner einfachsten Form, deren Beweis aber schon die ganze Idee enthält, lautet der Satz so:

Satz 3.1 (Cauchyscher Integralsatz für ein Rechteck) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, Q ein ganz in U gelegenes abgeschlossenes achsenparalleles Rechteck und γ eine den Rand ∂Q von Q einmal (im mathematisch positiven Sinne) durchlaufende Kurve, die stückweise stetig differenzierbar ist. Dann ist

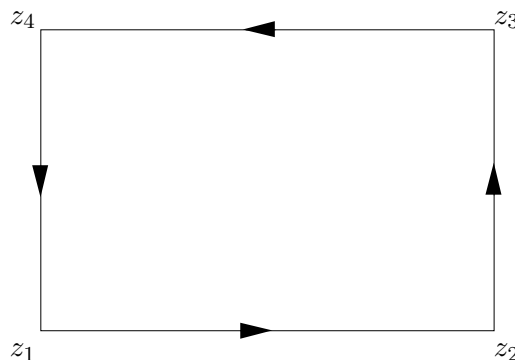
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis. Man beweist diesen Satz zuerst für zwei triviale Spezialfälle:

1. Fall: $f = 1$. Dann ist für eine C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stets

$$\int_{\gamma} dz = \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a),$$

und für unser Rechteck ist daher, wenn wir Namen für die Ecken einführen



$$\int_{\gamma} dz = \gamma(z_2) - \gamma(z_1) + \gamma(z_3) - \gamma(z_2) + \gamma(z_4) - \gamma(z_3) + \gamma(z_1) - \gamma(z_4) = 0.$$

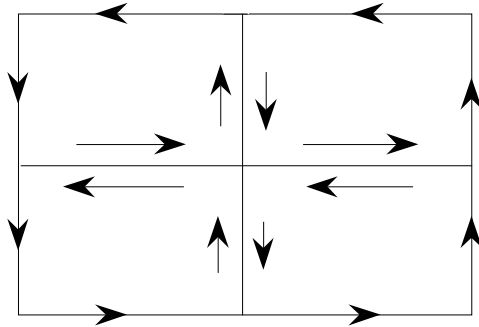
2. Fall: $f(z) = z$. Dann gilt für eine C^1 -Kurve γ wie oben:

$$\int_a^b \gamma(t) \gamma'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (\gamma(t))^2 dt = \frac{1}{2} ((\gamma(b))^2 - (\gamma(a))^2).$$

Dies folgt, da die $1/2 z^2$ eine Stammfunktion von z ist. Entsprechend ergibt sich für den Rand eines Rechtecks $\int_{\gamma} z dz = 0$.

Setzt man die beiden obigen Fälle zusammen, so ergibt sich, daß der Cauchysche Integralsatz für lineare Funktionen $c_0 + c_1z$ gilt, allgemeiner sogar für alle Funktionen f , die auf U eine Stammfunktion F besitzen.

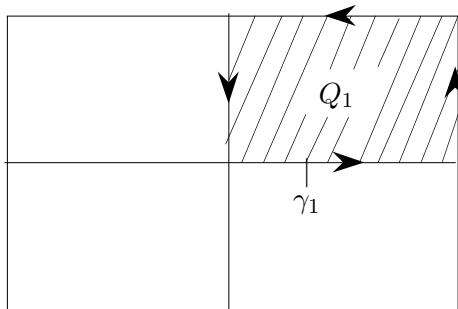
Den allgemeinen Fall behandelt man nun wie folgt. Wir unterteilen das Rechteck in vier gleiche Teile wie folgt:



Sei Q_1 dasjenige dieser vier Rechtecke, für welches das Integral über den Rand den größten Betrag annimmt, und sei γ_1 seine Randkurve. Dann ist jedenfalls

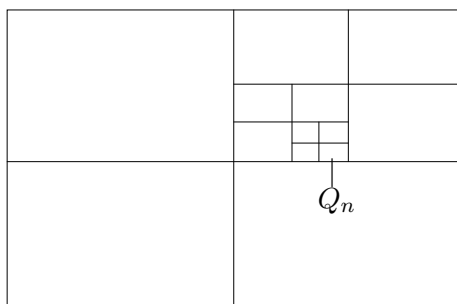
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right|,$$

denn die Summe der vier Randintegrale ist gerade $\int_{\gamma} f(z) dz$.



Indem wir induktiv so fortfahren, erhalten wir eine Folge $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ von Rechtecken mit Randkurven $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, und es gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right|.$$



Sei z_0 der Grenzpunkt dieser Folge von Rechtecken, d.h.

$$\{z_0\} = \bigcap_{n \geq 1} Q_n.$$

Nun benutzen wir lediglich, daß f an der Stelle z_0 komplex differenzierbar ist: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \leq \varepsilon$$

für alle z mit $0 < |z - z_0| < \delta$ oder:

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$$

für alle diese z . Da der Satz für lineare Funktionen schon gilt, können wir schließen, daß:

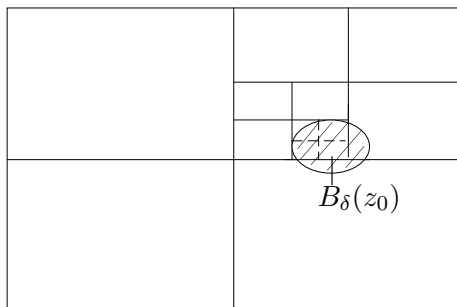
$$\int_{\gamma_n} f(z) dz = \int_{\gamma_n} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) dz.$$

Den Integranden des Integrals auf der rechten Seite haben wir aber bereits abgeschätzt. Ist ρ der Durchmesser und l der Umfang des Rechtecks Q , so ist $2^{-n}\rho$ der Durchmesser und $2^{-n}l$ der Umfang des Rechtecks Q_n . Wähle nun n so groß, daß $2^{-n}\rho < \delta$.

Dann ist der Integrand überall längs γ_n dem Betrage nach kleiner als $\varepsilon 2^{-n}\rho$, und weil γ_n die Länge $2^{-n}l$ hat, gilt:

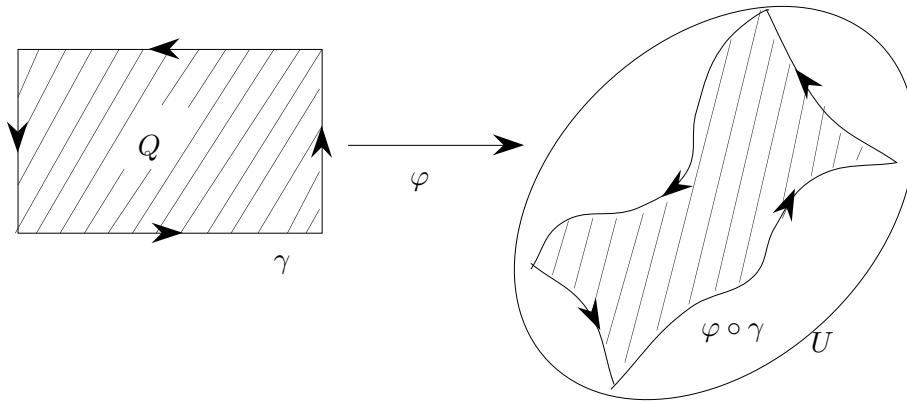
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-n} \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot l,$$

also $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot \rho \cdot l$ für beliebig vorgegebenes ε und damit haben wir gezeigt, daß $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. □



Satz 3.2 (Cauchyscher Integralsatz für Bilder von Rechtecken) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, Q ein abgeschlossenes Rechteck und $\varphi : Q \rightarrow U$ eine einmal stetig differenzierbare Abbildung. Sei γ wie oben eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in ∂Q , die Q einmal umläuft. Dann ist

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz = 0.$$



Beweis. Der Beweis ist eine naheliegende Verallgemeinerung des oben gegebenen Beweises. Das Integral verschwindet jedenfalls wenn f eine Stammfunktion hat ($F' = f$ für ein holomorphes $F : U \rightarrow \mathbb{C}$), also insbesondere für $f(z) = c_0 + c_1 z$. Wir konstruieren wieder $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ wie oben, so daß

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right|$$

ist. Wir müssen jetzt Durchmesser und Umfang von $\varphi(Q_n)$ abschätzen. Dies geht wie folgt: Da Q kompakt und φ stetig differenzierbar ist, gibt es eine Schranke für das Differential von φ , also:

$$\|d\varphi(p)\| \leq C$$

für alle $p \in Q$. Hiermit ist gemeint, daß die Norm aller Richtungsableitungen durch die Konstante C beschränkt ist. Dann ist der Durchmesser von $\varphi(Q_n)$ nicht größer als $C\rho 2^{-n}$ und die Länge von $\varphi \circ \gamma_n$ nicht größer als $lC 2^{-n}$. Sei nun $\{z_0\} = \varphi(\bigcap Q_n)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ wie im obigen Beweis, also so, daß

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$$

für alle z mit $|z - z_0| < \delta$. Wähle ferner n so daß $C\rho 2^{-n} < \delta$. Dann trifft das insbesondere für alle z in $\varphi(Q_n)$ zu und deshalb gilt

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right| \leq 4^n 2^{-n} 2^{-n} C^2 l \rho \varepsilon,$$

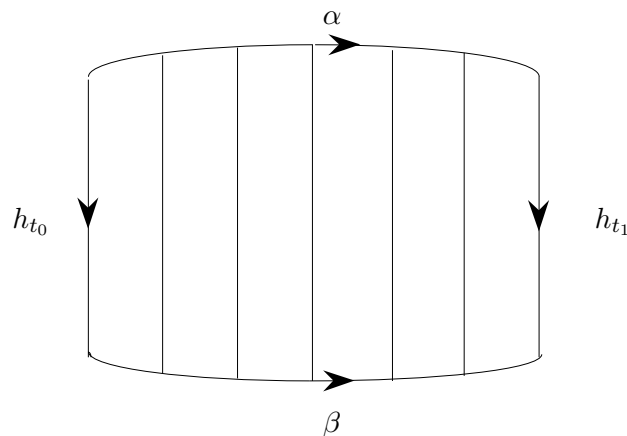
also $\left| \int_{\varphi \circ \gamma} f dz \right| \leq C^2 l \rho \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. □

Bemerkung Der Beweis benutzt nur die komplexe Differenzierbarkeit von f , nicht aber die Stetigkeit von f' .

Wir werden den obigen Satz oft in der folgenden Situation anwenden: Es seien $\alpha, \beta : [t_0, t_1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Wege. Für jedes $t \in [t_0, t_1]$ sei der Verbindungsweg

$$\begin{aligned} h_t : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t) \end{aligned}$$

ebenfalls in U enthalten.



Dann ist für jede holomorphe Funktion f auf U :

$$\int_{h_{t_0}} f(z)dz + \int_{\beta} f(z)dz - \int_{h_{t_1}} f(z)dz - \int_{\alpha} f(z)dz = 0.$$

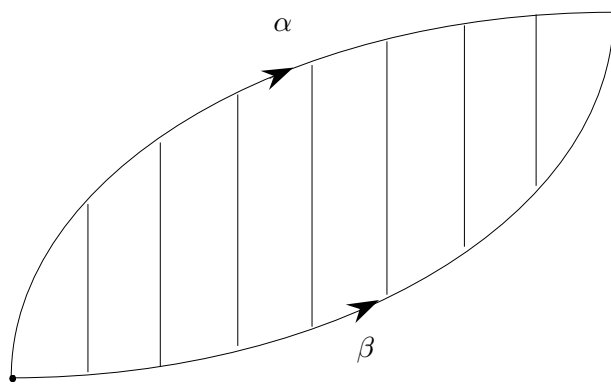
Dies folgt aus dem eben bewiesenen Satz, da

$$\begin{aligned} \varphi : [t_0, t_1] \times [0, 1] &\rightarrow U \\ (t, s) &\mapsto (1-s)\alpha(t) + s\beta(t) \end{aligned}$$

die Voraussetzung des Satzes erfüllt. Wir werden dies insbesondere auch dann anwenden, wenn α und β geschlossene Kurven sind, d.h. wenn $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$ und $\beta(t_0) = \beta(t_1)$ gilt.

Korollar 3.3 *Es seien $\alpha, \beta : [t_0, t_1] \rightarrow U$ stetig differenzierbare Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, d.h. $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$. Ferner sei für jeden Punkt $t \in [t_0, t_1]$ die Strecke zwischen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ ganz in U . Dann gilt*

$$\int_{\alpha} f(z)dz = \int_{\beta} f(z)dz.$$



Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung aus dem obigen. □

Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, so durchläuft

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto z_0 + re^{2\pi it} \end{aligned}$$

die Kreislinie um z_0 mit Radius r im mathematisch positiven Sinn.

Schreibweise. Wir verwenden die Bezeichnung

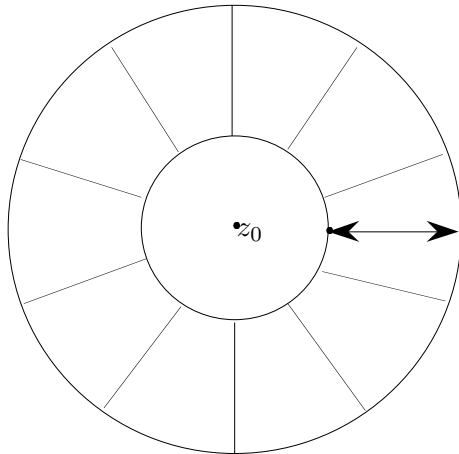
$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz := \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Korollar 3.4 (Cauchyscher Integralsatz für den Kreisring) Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $0 < r < R$ so, daß

$$\{z \in \mathbb{C}; r \leq |z - z_0| \leq R\} \subset U.$$

Dann gilt

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=R} f(z)dz.$$



Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der obigen Diskussion, wobei α, β die beiden Kreislinien um z_0 mit Radius r und R sind und $h_{t_0} = h_{t_1}$ ist. \square

Korollar 3.5 (Cauchyscher Integralsatz für die Kreisscheibe) Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq R\} \subset U.$$

Dann gilt

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Aus obigem mit $r = 0$. \square

Bemerkung In den obigen Anwendungen genügt es vorauszusetzen, daß f komplex differenzierbar auf U ist.

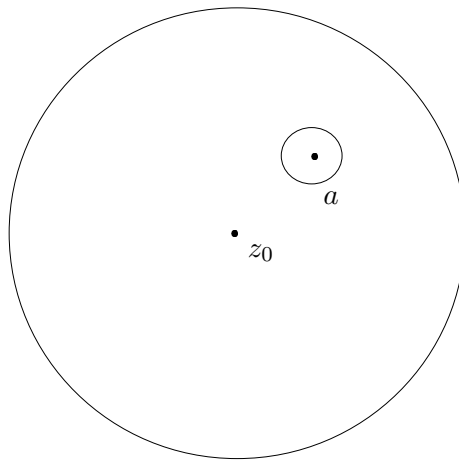
§ 4 Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes

Satz 4.1 (Cauchysche Integralformel) *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und*

$$a \in \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\} \subset U.$$

Dann gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$



Beweis. Aus dem Cauchyschen Integralsatz für Bilder von Rechtecken folgt für genügend kleine $\varepsilon > 0$:

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Wir betrachten nun den Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)}{z-a} dz.$$

Da f komplex differenzierbar ist, ist der Integrand des ersten Integrals auf der rechten Seite beschränkt, es gilt also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0.$$

Andererseits gilt

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon e^{2\pi i t}} \cdot 2\pi i \varepsilon e^{2\pi i t} dt = 2\pi i f(a)$$

und dies ergibt die Behauptung. \square

Wir werden als nächstes zeigen, daß jede komplex differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann. Damit ist jede komplex differenzierbare Funktion holomorph und sogar beliebig oft stetig komplex differenzierbar.

Satz 4.2 (Potenzreihenentwicklungssatz) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar. Es sei $\rho > 0$, so daß*

$$\{z; |z - z_0| < \rho\} \subset U.$$

Dann gibt es genau eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, die in einer Umgebung von z_0 die Funktion f darstellt. Der Konvergenzradius dieser Funktion ist mindestens ρ und für die Koeffizienten c_n gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für $0 < r < \rho$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit einer solchen Potenzreihe, falls sie existiert. In diesem Fall ist f in einer Umgebung von z_0 beliebig oft komplex differenzierbar und für die Koeffizienten c_n muß gelten

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

insbesondere sind diese Koeffizienten eindeutig bestimmt.

Um die Existenz zu zeigen, können wir ohne Einschränkung $z_0 = 0$ annehmen. Dann gilt nach Satz 4.1 für alle z mit $|z| < r$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} d\zeta.$$

Da

$$\left| \frac{z}{\zeta} \right| = \frac{|z|}{r} < 1$$

folgt aus der Konvergenz der geometrischen Reihe, daß

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n.$$

Diese Reihe konvergiert für festes z gleichmäßig auf $|\zeta| = r$. Da $f(\zeta)$ stetig von ζ abhängt und $|\zeta| = r$ kompakt ist, konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

gleichmäßig auf $|\zeta| = r$, und es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n$$

und dies ergibt gerade die Behauptung. \square

Korollar 4.3 (Satz von Goursat) *Jede komplex differenzierbare Funktion ist holomorph und beliebig oft stetig komplex differenzierbar.*

Satz 4.4 (Mittelwertsatz) *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gelte, daß $\{z; |z - z_0| \leq r\} \subset U$. Dann ist*

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi it}) dt$$

d.h. $f(z_0)$ ist der Mittelwert über die Funktionswerte von f auf dem Kreis $\{|z - z_0| = r\}$.

Beweis. Es gilt

$$f(z_0) = c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{2\pi it})}{re^{2\pi it}} 2\pi i r e^{2\pi it} dt.$$

\square

Satz 4.5 (Abschätzung der Taylorkoeffizienten) Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\{z; |z - z_0| \leq r\} \subset U$. Ferner sei $|f(z)| \leq M$ auf dem Kreis $\{|z - z_0| = r\}$. Dann gilt für die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ von f um den Punkt z_0 , daß

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Beweis. Es gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

und deshalb

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \int_{|z-z_0|=r} dz = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

□

Satz 4.6 (Liouville) Jede beschränkte ganze Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis. Es sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für jedes $r > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } |c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Da $r > 0$ beliebig ist, folgt $c_n = 0$ für $n \geq 1$, d.h. $f(z) \equiv c_0$. □

Satz 4.7 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom von Grad ≥ 1 hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis. Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \text{ mit } a_n \neq 0, n \geq 1.$$

Wegen

$$f(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. D.h. für jedes $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $r > 0$ mit $|f(z)| \geq M$ für alle $|z| \geq r$. Falls $f(z)$ keine Nullstelle auf \mathbb{C} hätte, so wäre $1/f(z)$ eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion, die wegen der obigen Überlegung beschränkt ist. Also muß nach dem Satz von Liouville $1/f(z)$ konstant sein und damit auch $f(z)$. □

Wir wollen als nächstes das lokale Verhalten von holomorphen Funktionen in der Umgebung von Nullstellen untersuchen.

Definition Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = 0$. Dann sagt man, f hat in z_0 eine *Nullstelle der Ordnung k* , falls

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \text{ für } n = 0, \dots, k-1, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Beispiel $f(z) = c(z - z_0)^k, c \neq 0$ hat eine Nullstelle der Ordnung k .

Lemma 4.8 *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist f lokal biholomorph um z_0 , d.h. es gibt Umgebungen U_0 von z_0 und U_1 von $z_1 = f(z_0)$, so daß $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow U_1$ bijektiv ist und $g = (f|_{U_0})^{-1} : U_1 \rightarrow U_0$ ebenfalls holomorph ist.*

Beweis. Aus der Analysis weiß man, daß es Umgebungen U_0 und U_1 gibt, so daß $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow U_1$ bijektiv ist, und so daß $g = (f|_{U_0})^{-1}$ reell stetig differenzierbar ist. Schreibt man $f = u + iv$, so ist die Funktionalmatrix von f von der Form

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Die Funktionalmatrix der Umkehrfunktion ist das Inverse dieser Matrix, also gleich

$$\frac{1}{u_x v_y - u_y v_x} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}.$$

Damit erfüllt auch g die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, ist also holomorph. \square

Ist $h(z)$ eine holomorphe Funktion, die in z_0 eine einfache Nullstelle hat, dann besitzt $f(z) = h(z)^k$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung k . Der nächste Satz besagt, daß lokal auch die Umkehrung gilt.

Satz 4.9 *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die im Punkt z_0 eine k -fache Nullstelle besitzt. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, die in z_0 eine einfache Nullstelle besitzt, so daß*

$$f(z) = (h(z))^k \text{ für } z \in U_0.$$

Bemerkung Man kann $h(z)$ lokal als (eine) k -te Wurzel von $f(z)$ verstehen. Die Funktion $h(z)$ ist nur bis auf k -te Einheitswurzeln festgelegt.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $z_0 = 0$ annehmen. Die Potenzreihenentwicklung von f um z_0 hat die Gestalt

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \dots = c_k z^k \left(1 + \frac{c_{k+1}}{c_k} z + \dots \right)$$

mit $c_k \neq 0$. Wir können $c_k = 1$ annehmen. Es sei

$$g(z) = 1 + c_{k+1} z + \dots,$$

also

$$f(z) = z^k g(z).$$

Die Aufgabe besteht nun darin, lokal eine k -te Wurzel der Funktion $g(z)$ zu finden. Dazu stellen wir zunächst fest, daß die Funktion z^k lokal biholomorph um den Punkt 1 ist. Dies folgt aus obigem Lemma (4.8), da

$$\frac{d}{dz} z^k \Big|_1 = k \neq 0.$$

Wir wählen nun Umgebungen U_1 und U_2 von 1, so daß die Abbildung $z \mapsto z^k : U_1 \rightarrow U_2$ biholomorph ist. Da $g(0) = 1$ ist und g holomorph ist, können wir eine Umgebung U_0 von 0 wählen, so daß $g(U_0) \subset U_2$. Es sei $\varphi : U_2 \rightarrow U_1$ die lokale Umkehrabbildung von $z \mapsto z^k$. Da $(\varphi \circ g)(0) = 1$ ist, hat

$$h(z) := z \cdot (\varphi \circ g)(z)$$

im Punkt 0 eine einfache Nullstelle. Es gilt

$$h(z)^k = z^k (\varphi(g(z)))^k = z^k g(z) = f(z)$$

und damit ist der Satz bewiesen. \square

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^k. \end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, daß es für jedes $k \geq 1$ genau k Wurzeln von 1 gibt, die sogenannten k -ten Einheitswurzeln. Diese sind

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i n}{k}}, \quad n = 0, \dots, k-1.$$

Entsprechend hat die Abbildung $f(z) = z^k$ die Eigenschaft, daß 0 nur ein Urbild hat, während alle anderen Zahlen k Urbilder haben. Ist $z = r e^{i\varphi}$ mit $r > 0$, sind diese durch

$$z_n = \sqrt[k]{r} e^{\frac{i\varphi}{k}} \zeta_n, \quad n = 0, \dots, k-1$$

gegeben. Man sagt dann, daß $f(z) = z^k$ eine über 0 *verzweigte Überlagerung* mit *Blätterzahl* k ist.

Satz 4.10 (Satz über die lokale Blätterzahl) *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die im Punkt z_0 eine k -fache Nullstelle besitzt. Dann gibt es für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_ε von z_0 , so daß*

$$f|_{U_\varepsilon} : U_\varepsilon \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}$$

für jeden Punkt w mit $0 < |w| < \varepsilon$ genau k Urbilder hat, während $(f|_{U_\varepsilon})^{-1}(0) = z_0$ gilt.

Beweis. Wir können wiederum ohne Einschränkung $z_0 = 0$ annehmen. Nach Satz (4.9) gibt es eine Umgebung U' von z_0 , so daß wir $f|_{U'}$ in der Form

$$f(z) = (h(z))^k$$

schreiben können, wobei $h(0) = 0$ ist und h in 0 eine einfache Nullstelle besitzt. Insbesondere ist h lokal biholomorph, d.h. nach eventuellem Verkleinern von U' haben wir eine Umgebung V' von 0, so daß $h|_{V'} : V' \rightarrow V'$ biholomorph ist. Es sei $w = h(z)$. Da die Abbildung $w \mapsto w^k$ eine verzweigte k -blättrige Überlagerung ist, gilt dies auch für $f(z) = (h(z))^k = w^k$. \square

Definition Eine zusammenhängende offene Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ heißt ein *Gebiet*.

Satz 4.11 (Identitätssatz) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ seien holomorphe Funktionen. Falls die Menge*

$$M = \{z \in G; f(z) = g(z)\}$$

in G einen Häufungspunkt besitzt, dann gilt $f = g$ auf ganz G .

Beweis. Es sei z_0 ein Häufungspunkt von M . Dann folgt aus Satz (4.10), daß $f - g$ in z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung hat. Es sei nun M' die Menge der Nullstellen von $f - g$ von unendlicher Ordnung. Wir haben eben gesehen, daß $M' \neq \emptyset$. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz (4.2) ist M' offen. Andererseits ist M' auch abgeschlossen in G , denn ist $(f - g)(z_1) \neq 0$, so hat $f - g$ in einer Umgebung von z_1 gar keine Nullstellen und hat $f - g$ in z_1 eine Nullstelle endlicher Ordnung, so hat nach dem Satz über die Blätterzahl $f - g$ in einer Umgebung von z_1 keine weiteren Nullstellen. Da G zusammenhängend ist, folgt $M' = G$ und damit $f \equiv g$. \square

Das Verhalten holomorpher Funktionen unterscheidet sich damit wesentlich vom Verhalten von C^∞ -Funktionen, wie folgendes Beispiel zeigt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Satz 4.12 (Gebietstreue) *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant auf einem Gebiet G , dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Da f stetig ist, ist $f(G)$ zusammenhängend. Es bleibt lediglich zu zeigen, daß $f(G)$ offen ist. Es sei dazu $w_0 = f(z_0) \in f(G)$. Die Funktion $f(z) - w_0$ hat in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung k . Dies folgt aus dem Identitätssatz, da sonst $f(z) - w_0$ in einer Umgebung von z_0 gleich 0 und damit auf ganz G identisch 0 wäre, d.h. $f \equiv w_0$. Damit folgt aber

aus dem Satz über die Blätterzahl, daß es eine Umgebung $B_\varepsilon(w_0) = \{w \in \mathbb{C}; |w - w_0| < \varepsilon\}$ gibt, so daß jeder Punkt $w \neq w_0$ in $B_\varepsilon(w_0)$ mindestens k Urbilder besitzt. Insbesondere ist $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$, d.h. $f(G)$ ist offen. \square

Satz 4.13 (Maximumprinzip) *Es sei G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann besitzt f auf G kein Betragsmaximum.*

Beweis. Gäbe es einen Punkt $z_0 \in G$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$, so wäre $f(G)$ nicht offen. \square

Satz 4.14 (Schwarzsches Lemma) *Es sei*

$$E = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

das Innere des Einheitskreises und $f : E \rightarrow E$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in E$ und $|f'(0)| \leq 1$. Gibt es einen Punkt $z_0 \neq 0$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h. es gibt ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = e^{i\varphi} z.$$

Beweis. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz können wir f auf E in eine konvergente Potenzreihe entwickeln, deren konstanter Term wegen $f(0) = 0$ verschwindet, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = z g(z)$$

mit $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$. Nach der Produktregel gilt $f'(0) = g(0)$. Für z mit $|z| = r < 1$ gilt dann

$$|f(z)| = |z| |g(z)| = r |g(z)| \leq 1,$$

d.h.

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \text{ für alle } r < 1, |z| = r.$$

Nach dem Maximumprinzip muß die Einschränkung von g auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ ihr Betragsmaximum auf dem Rand annehmen, d.h. es gilt

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \text{ für alle } r < 1, |z| \leq r.$$

Für $r \rightarrow 1$ liefert dies $|g(z)| \leq 1$ und damit $|f(z)| \leq |z|$. Wir nehmen nun an, daß an einer Stelle das Gleichheitszeichen gilt. D.h. es gibt ein z mit $|g(z)| = 1$. Nach dem Maximumprinzip muß g dann konstant sein, d.h. $g(z) = e^{i\varphi}$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$, und damit gilt $f(z) = z e^{i\varphi}$, d.h. f ist eine Drehung. \square

§ 5 Isolierte Singularitäten

Wir wollen in diesem Paragraph die verschiedenen Typen von isolierten Singularitäten holomorpher Funktionen diskutieren und die Laurententwicklung herleiten.

Definition es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Ist $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so sagt man, f habe in z_0 eine *isolierte Singularität*.

Definition Eine isolierte Singularität z_0 heißt eine *hebbare Singularität*, falls es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die f fortsetzt, d.h. $\tilde{f}|_{U \setminus \{z_0\}} = f$.

Definition Man sagt, z_0 sei ein *Pol* von f , falls z_0 keine hebbare Singularität ist, es aber ein $m \geq 1$ gibt, so daß $(z - z_0)^m f(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität besitzt. Das kleinste m mit dieser Eigenschaft heißt die *Ordnung* des Poles.

Definition Eine isolierte Singularität, die weder hebbar noch ein Pol ist, heißt eine *wesentliche Singularität*.

Beispiel (1) Nimmt man aus dem Definitionsgebiet einer holomorphen Funktion isolierte Punkte heraus, so erhält man stets hebbare Singularitäten.

(2) Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z_0) \neq 0$. Dann hat

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$$

im Punkt z_0 einen Pol der Ordnung m . Zunächst ist $(z - z_0)^m g(z) = f(z)$ holomorph fortsetzbar. Andererseits kann die Ordnung des Pols auch nicht kleiner sein, da

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^k} = \infty \text{ für } k \geq 1.$$

Hat umgekehrt $g(z)$ in z_0 einen Pol der Ordnung m , so gilt

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$$

für eine auf U holomorphe Funktion f . Es gilt $f(z_0) \neq 0$, da sonst bereits $(z - z_0)^{m-1} g(z)$ eine hebbare Singularität hätte.

- (3) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ hat in 0 eine wesentliche Singularität. Dies folgt aus dem Identitätssatz, da

$$f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \sin 2\pi k = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z},$$

d.h. die Menge der Nullstellen von $f(z)$ hat 0 als Häufungspunkt.

Definition Ist f bis auf Pole auf U eine holomorphe Funktion, dann heißt f eine *meromorphe Funktion* auf U .

Bemerkung Nach unserer obigen Diskussion kann man meromorphe Funktion lokal stets als Brüche $f = g/h$ mit g, h holomorph und $h \neq 0$ schreiben. Umgekehrt stellt jeder solcher Bruch eine meromorphe Funktion dar.

Laurentreihen

Definition Eine *Laurentreihe* um den Punkt z_0 ist eine Reihe der Form

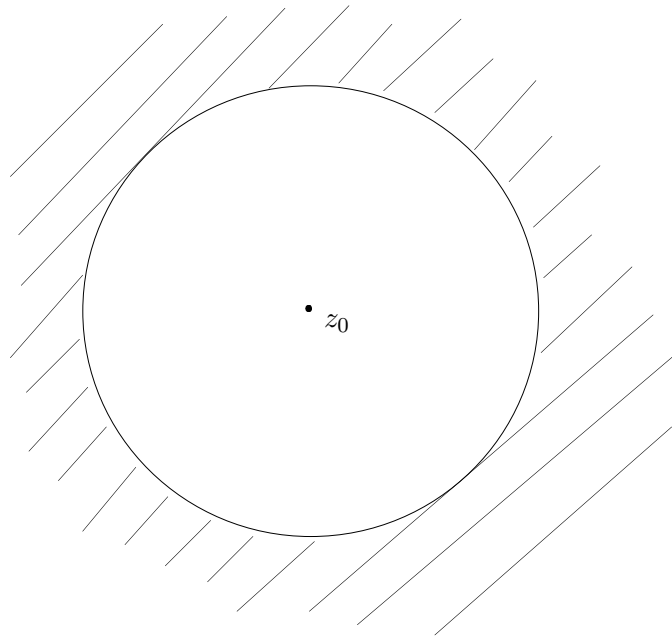
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Man nennt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ den *Nebenteil* der Laurentreihe und $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ den *Hauptteil*. Eine Laurentreihe heißt *konvergent* (*absolut konvergent*, *gleichmäßig konvergent*) in einem Punkt z , wenn sowohl Hauptteil wie Nebenteil konvergent (absolut konvergent, gleichmäßig konvergent) sind. In diesem Fall nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

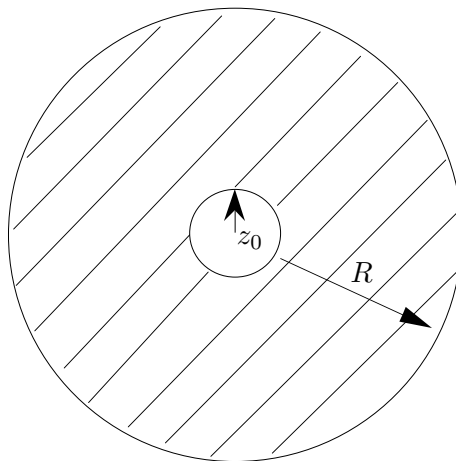
den *Wert* der Laurentreihe.

Bemerkung Der Hauptteil einer Laurentreihe ist also eine Potenzreihe in $\frac{1}{(z-z_0)}$. Ist $\frac{1}{r} \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ absolut konvergent für $|z - z_0| > r$ und divergent für $|z - z_0| < r$. In dem Gebiet $|z - z_0| > r$ stellt $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ eine holomorphe Funktion dar.



Ist ferner $R \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$,
 so konvergiert, falls $r < R$ ist, die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ in dem
Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; r < |z - z_0| < R\}.$$



Dort stellt die Laurentreihe eine holomorphe Funktion dar. Gilt $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, so ist die Konvergenz in dem Bereich

$$\bar{K}_{\rho_1, \rho_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$$

gleichmäßig. Für $|z - z_0| < r$ oder $|z - z_0| > R$ divergiert die Reihe.

Bemerkung Konvergiert die Potenzreihe in dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$, so kann man dort gliedweise differenzieren, d.h. es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$$

und diese Reihe konvergiert ebenfalls auf $K_{r,R}(z_0)$.

Bemerkung Wegen des Term $c_{-1} \frac{1}{(z-z_0)}$ besitzt eine Laurentreihe im allgemeinen keine Stammfunktion. Ist jedoch $c_{-1} = 0$, so hat die konvergente Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ die Stammfunktion

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

die in demselben Kreisring konvergiert.

Lemma 5.1 *Es seien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ Laurentreihen, die beide in dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ konvergieren und dort dieselbe holomorphe Funktion darstellen. Dann gilt für jedes ρ mit $r < \rho < R$:*

$$a_n = b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Beweis. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir gliedweise integrieren, d.h. wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{|z-z_0|=\rho} a_k (z - z_0)^{k-n-1} dz.$$

D $a_k (z - z_0)^{k-n-1}$ für $k \neq n$ eine Stammfunktion besitzt, folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{a_n}{z-z_0} dz = a_n.$$

Dies zeigt insbesondere auch die Eindeutigkeit $a_n = b_n$. \square

Wir zeigen nun, daß man jede holomorphe Funktion in einem Kreisring in eine Laurentreihe entwickeln kann.

Satz 5.2 (Laurententwicklung) *Es sei f in dem Kreisring*

$$K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z - z_0| < R\}$$

holomorph. Dann kann man dort die Funktion f in eine Laurentreihe

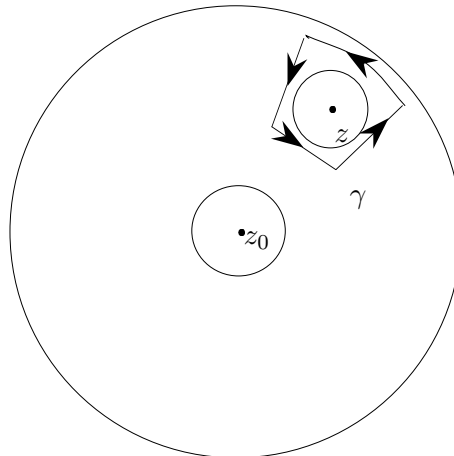
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

entwickeln und es gilt für jedes ρ mit $r < \rho < R$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Bemerkung Wir haben bereits folgendes gesehen: falls f eine Laurententwicklung besitzt, dann haben die Koeffizienten c_n die angegebene Form.

Beweis. Es sei $z \in K_{r,R}(z_0)$. Es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, so daß der Kreis um z mit Radius ε in $K_{r,R}(z_0)$ liegt. Wir können ohne Einschränkung $z_0 = 0$ annehmen. Dann betrachten wir die folgende Situation



Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Bilder von Rechtecken und der Cauchyschen Integralformel gilt dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Vergrößert man nun den Winkel des Segments des Kreisrings, das von γ umrandet wird, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R-\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r+\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R-\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r+\rho} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Wir verfahren dann wie beim Potenzreihenentwicklungssatz. Entwickeln wir

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}$$

in eine geometrische Reihe, so liefert das erste Integral den Nebenteil der Laurententwicklung, und entsprechend erhalten wir durch Entwickeln von

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}$$

aus dem zweiten Integral den Hauptteil der Laurententwicklung. \square

Wie bei der Potenzreihenentwicklung können wir die folgende Abschätzung der Laurentkoeffizienten herleiten.

Satz 5.3 Falls auf der Kreislinie $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$ die Funktion f durch $|f(z)| \leq M$ beschränkt ist, folgt

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Wir können nun einen Bezug zu den isolierten Singularitäten herstellen. Falls f in z_0 eine isolierte Singularität besitzt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß f auf der Menge $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < \varepsilon\}$ holomorph ist. Insbesondere ist f in einem Kreisring zum z_0 holomorph und kann dort in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

entwickelt werden. Es gilt

- (1) f hat in z_0 genau dann eine *hebbare Singularität*, wenn $c_n = 0$ ist für $n \leq -1$, d.h. wenn der Hauptteil der Laurententwicklung identisch 0 ist.
- (2) f hat in z_0 genau dann einen *Pol der Ordnung k* , wenn $c_{-k} \neq 0$ ist und $c_{-l} = 0$ für $l > k$, d.h. der Hauptteil ist endlich.

- (3) f hat in z_0 genau dann eine *wesentliche Singularität*, wenn der Hauptteil nicht abbricht.

Satz 5.4 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Es sei f eine holomorphe Funktion, die im Punkt z_0 eine isolierte Singularität besitzt und in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist (d.h. es gibt $\varepsilon > 0$ und ein $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle z mit $0 < |z - z_0| < \varepsilon$). Dann besitzt f in z_0 eine hebbare Singularität.*

Beweis. Es gilt

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

für $0 < r < \varepsilon$. Für $r \rightarrow 0$ folgt dann $c_n = 0$ für $n \geq 1$. \square

Satz 5.5 (Casorati-Weierstraß) *Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ habe in z_0 eine wesentliche Singularität. Für $\varepsilon > 0$ sei*

$$\dot{B}_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} \subset U$$

die punktierte Kreisscheibe um z_0 . Dann ist $f(\dot{B}_\varepsilon(z_0))$ dicht in \mathbb{C} .

Beweis. Wir können $z_0 = 0$ annehmen. Nehmen wir an, daß die Aussage des Satzes falsch ist, dann gibt es einen Punkt $\omega_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ mit

$$f(\dot{B}_\varepsilon(z_0)) \cap B_\delta(\omega_0) = \emptyset$$

(wobei $B_\delta(\omega_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - \omega_0| < \delta\}$ die Kreisscheibe um ω_0 mit Radius δ ist). Wir betrachten die Funktion

$$h(z) := \frac{1}{f(z) - \omega_0}$$

auf der punktierten Kreisscheibe $\dot{B}_\varepsilon(z_0)$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz hat $h(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität. Damit hat

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + \omega_0$$

in z_0 entweder eine hebbare Singularität oder höchstens einen Pol, was in jedem Fall zu einem Widerspruch führt. \square

Man kann diese Aussage sogar noch verschärfen.

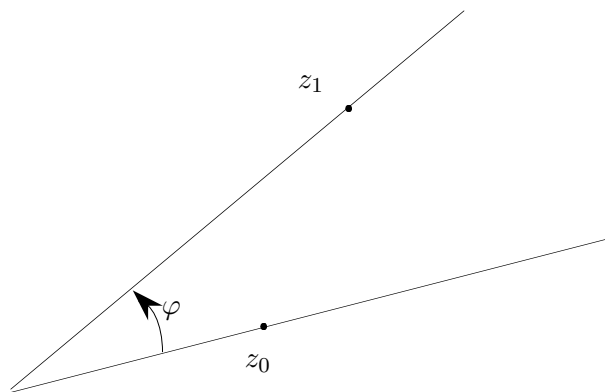
Satz 5.6 (Picard) *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in z_0 eine wesentliche Singularität besitzt. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ entweder $f(\dot{B}_\varepsilon(z_0)) = \mathbb{C}$ oder es gibt einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ mit $f(\dot{B}_\varepsilon(z_0)) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.*

Beispiel Das Beispiel $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ zeigt, daß der zweite Fall auch tatsächlich eintritt, da in diesem Fall 0 niemals als Wert auftreten kann.

§ 6 Die Umlaufversion des Cauchyschen Integralsatzes

Wir wollen zunächst die *Umlaufzahl* eines geschlossenen Weges γ um einen Punkt a definieren. Dazu müssen wir kurz die Winkelmessung in \mathbb{C} wiederholen. Es seien z_0, z_1 von 0 verschiedene komplexe Zahlen. Dann gibt es genau einen Winkel φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$, so daß

$$\frac{z_0}{|z_0|} e^{i\varphi} = \frac{z_1}{|z_1|}.$$



Definition Man nennt φ den *Winkel* zwischen z_0 und z_1 .

Schreibweise.

$$\varphi = \sphericalangle(z_0, z_1).$$

Es sei nun $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine *Halbebenekurve*, d.h. es gibt eine Gerade durch 0, so daß $\gamma([t_0, t_1])$ ganz in einer der durch diese Geraden bestimmten Halbebene liegt. (Siehe Bild auf Seite 34.)

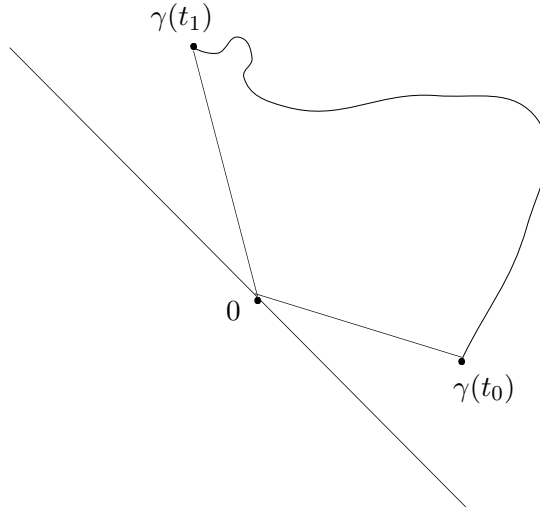
Für eine solche Kurve setzen wir

$$\sphericalangle \gamma : \sphericalangle(\gamma(t_0), \gamma(t_1)).$$

Es sei nun $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine beliebige stetige Kurve. Dann können wir eine Unterteilung $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1$ finden, so daß $\gamma_i = \gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ jeweils Halbebenekurven sind. Wir definieren dann

$$\sphericalangle \gamma := \sum_{i=1}^n \sphericalangle \gamma_i.$$

Dieser Winkel ändert sich bei Verfeinerungen nicht und damit sieht man auch, daß $\sphericalangle \gamma$ unabhängig von der gewählten Unterteilung ist, da je zwei Unterteilungen des Intervalls $[t_0, t_1]$ eine gemeinsame Verfeinerung besitzen.



Lemma 6.1 Ist $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine geschlossene Kurve, d.h. ist $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ dann gibt es eine ganze Zahl n mit $\angle\gamma = 2\pi n$.

Beweis. Wir wählen eine geeignete Verfeinerung $t_0 = \tau_0 < \tau_1 \dots < \tau_n = t_1$ und setzen $\gamma_i = \gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ und $\varphi_i = \angle\gamma_i$. Dann gilt

$$\frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|} e^{i(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)} = \frac{\gamma(t_1)}{|\gamma(t_1)|} = \frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|}$$

Also ist $\angle\gamma = \varphi_1 + \dots + \varphi_n = 2\pi n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. □

Definition Man nennt n die *Umlaufzahl* von γ um den Punkt 0 und bezeichnet diese mit $\nu_\gamma(0) := n$. Liegt $a \in \mathbb{C}$ nicht auf dem Weg γ , so definiert man die Umlaufzahl von γ um den Punkt a durch

$$\nu_\gamma(a) := \nu_{\gamma-a}(0),$$

wobei $(\gamma - a)(t) = \gamma(t) - a$ der um $-a$ verschobene Weg γ ist.

Bemerkungen (i) Die Umlaufzahl ändert sich nicht bei Umparametrisierung des Weges γ .

(ii) Sind $\gamma_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [t'_0, t'_1] \rightarrow \mathbb{C}$ geschlossene Wege mit $\gamma_2(t'_0) = \gamma_1(t_1)$, die nicht durch a gehen, so gilt

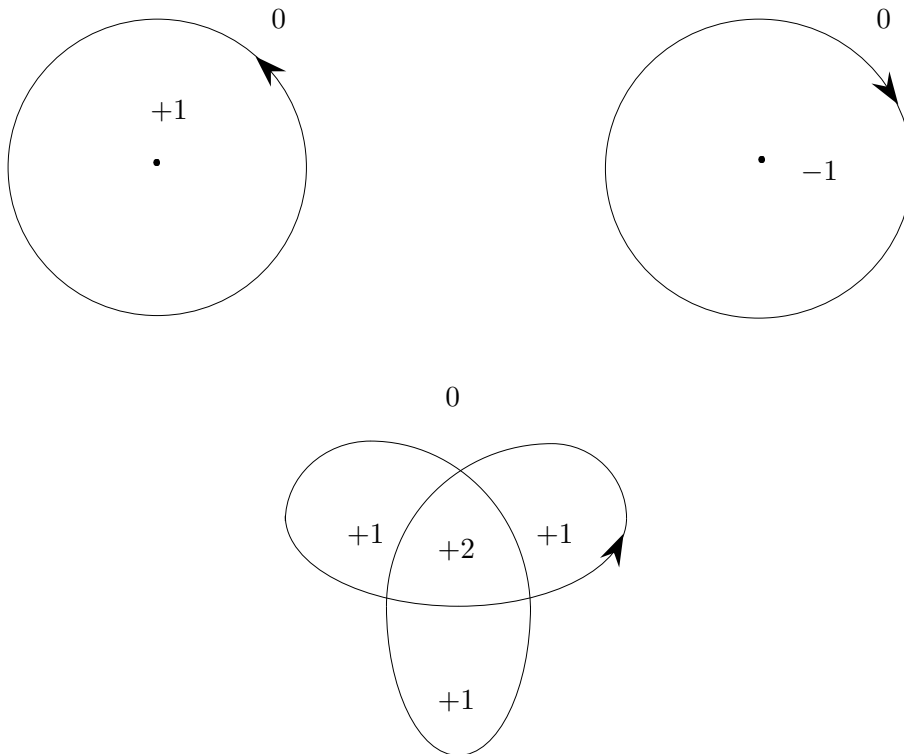
$$\nu_{\gamma_2\gamma_1}(a) = \nu_{\gamma_2}(a) + \nu_{\gamma_1}(a).$$

(iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \nu_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([t_0, t_1]) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto \nu_\gamma(a) \end{aligned}$$

hängt stetig vom Punkt a ab (und ist damit lokal konstant).

Beispiel



Definition Ein *Zykel* ist eine endliche Summe

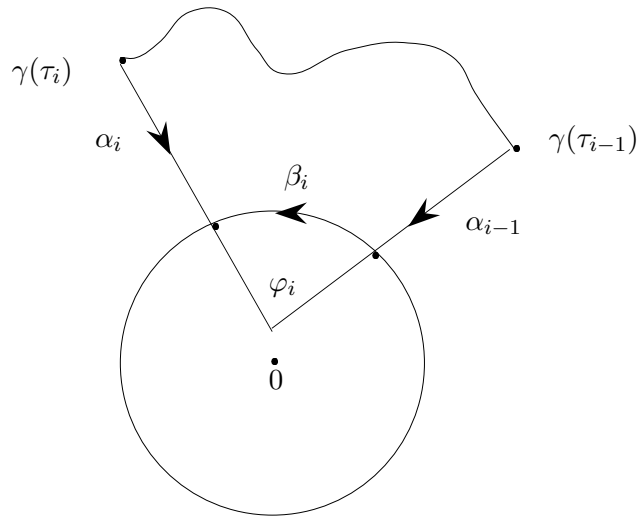
$$\gamma = n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

von geschlossenen Wegen.

Lemma 6.2 *Es sei ein $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein (stückweise stetig differenzierbarer) Weg, der nicht durch den Punkt a geht. Dann gilt*

$$\nu_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Beweis. Wir nehmen wieder $a = 0$ an und zerlegen das Intervall $[t_0, t_1]$ durch $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1$ so, daß $\gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ eine Halbebienenkurve ist. Es sei α_i die linear parametrisierte Strecke von $\gamma(\tau_i)$ nach $\gamma(\tau_i)/|\gamma(\tau_i)|$ und β_i der kürzeste Kreisbogen von $\gamma(\tau_{i-1})/|\gamma(\tau_{i-1})|$ nach $\gamma(\tau_i)/|\gamma(\tau_i)|$.



Dann gilt für $\gamma_i := \gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$:

$$\int_{\gamma_i} \frac{dz}{z-a} = \int_{\alpha_{i-1}} \frac{dz}{z-a} + \int_{\beta_i} \frac{dz}{z-a} - \int_{\alpha_i} \frac{dz}{z-a}.$$

Aufsummieren über alle Teilintervalle ergibt

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \sum_i \int_{\beta_i} \frac{dz}{z-a} = \sum_i 2\pi i \varphi_i = 2\pi i \nu_{\gamma}(a).$$

□

Definition Wir sagen, daß ein Weg γ den Punkt a umläuft, falls $\nu_{\gamma}(a) \neq 0$ gilt.

Satz 6.3 (Umlaufversion des Cauchyschen Integralsatzes) Es sei G ein Gebiet in \mathbb{C} und $\gamma = \sum n_i \gamma_i$ ein Zykel. Dann gilt

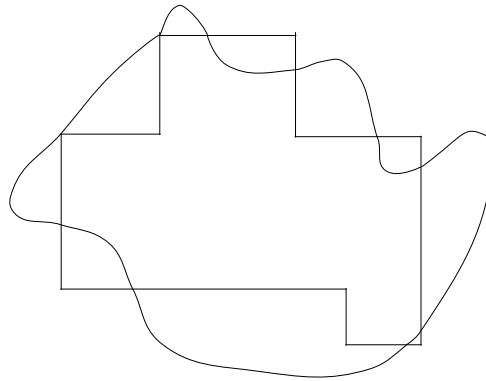
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jede auf G holomorphe Funktion f genau dann, wenn γ keinen Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$ umläuft, d.h. $\nu_{\gamma}(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$.

Beweis. Wir werden den Beweis hier nicht ausführen. Die Notwendigkeit der Bedingung $\nu_\gamma(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus G$ ist klar, da nach obigem Lemma gilt

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \nu_\gamma(a).$$

Die andere Richtung ist technisch schwieriger zu beweisen. Man kann γ mit sogenannten Kantenwegen vergleichen, d.h. Wegen, die stückweise achsenparallel sind.



Man zeigt dann, daß es genügt, den Satz für solche geschlossenen Kantenwege zu zeigen, wobei man bei dieser Reduktion den bereits bewiesenen Cauchyschen Integralsatz verwendet. Die Aussage für geschlossene Kantenwege kann dann elementar gezeigt werden. \square

Satz 6.4 (Umlaufversion der Cauchyschen Integralformel) *Es sei G ein Gebiet in \mathbb{C} und f eine auf G holomorphe Funktion. Es sei γ ein Zykel in G , der nicht durch $a \in G$ geht und keinen Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$ umläuft. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \nu_\gamma(a) f(a).$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ genügend klein und

$$\beta(t) = a + \varepsilon e^{2\pi i \nu_\gamma(a) t}.$$

Dann gilt $\nu_\beta(a) = \nu_\gamma(a)$, d.h. $\gamma - \beta$ umläuft a nicht. Ferner umläuft $\gamma - \beta$ auch keinen Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$. Dann gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\gamma-\beta} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0,$$

d.h.

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\beta} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \nu_{\beta}(a) f(a) = 2\pi i \nu_{\gamma}(a) f(a).$$

□

Bemerkung Wir haben hier nur Integrale über stückweise stetig differenzierbare Kurven behandelt. Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung kann man Integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ über *stetige* Wege definieren. Man zeigt dann, daß

$$\int_{\beta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

für Wege $\beta, \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$ und $\beta(t_1) = \gamma(t_1)$ ist, falls sich der Weg β im Definitionsbereich von f stetig in den Weg γ überführen läßt, d.h. falls β und γ homotop sind. Alle oben gemachten Sätze gelten dann auch für stetige Wege.

§ 7 Der Residuenkalkül

Wir wollen nun die oben entwickelten Techniken zur Berechnung (auch reeller) Integrale benutzen. Die holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ habe in z_0 eine isolierte Singularität. Dann hatten wir bereits gesehen, daß wir f in einer Umgebung von z_0 in eine Laurentreihe entwickeln können:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Definition Das *Residuum* von f im Punkt z_0 ist definiert durch

$$\text{Res}_{z_0} f = c_{-1}.$$

Bemerkung (i) Hat f in z_0 eine hebbare Singularität, so gilt stets $\text{Res}_{z_0} f = 0$.

(ii) Aus der bereits hergeleiteten Integralformel für die Laurentkoeffizienten folgt, daß für genügend kleines $\varepsilon > 0$ gilt

$$\text{Res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz.$$

Theorem 7.1 (Residuensatz) *Es sei G ein Gebiet in \mathbb{C} und f sei eine Funktion, die bis auf isolierte Singularitäten holomorph auf G ist. Es sei S die Menge der Singularitäten von f in G . Ferner sei γ ein Zykel in G , der durch keinen Punkt von S geht und keinen Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$ umläuft.*

Dann umläuft γ nur endlich viele Punkte von S und es gilt die sogenannte Residuenformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in S} \nu_{\gamma}(a) \operatorname{Res}_a f.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß γ unendlich viele Punkte von S umläuft. Der Abschluß der Menge der von γ umlaufenen Punkte ist kompakt, also hätte die Menge der umlaufenen Singularitäten einen Häufungspunkt s_0 . Der Punkt s_0 ist nicht in G , also umläuft γ den Punkt s_0 nach Voraussetzung nicht. Da $\nu_{\gamma}(z)$ lokal konstant ist, umläuft γ auch keinen Punkt in einer genügend kleinen Umgebung von s_0 , was einen Widerspruch zur Konstruktion von s_0 liefert. Also ist die Anzahl der von γ umlaufenen Singularitäten endlich.

Es seien a_1, \dots, a_r die von γ umlaufenden Singularitäten. Für $k = 1, \dots, r$ und $\varepsilon > 0$ genügend klein betrachten wir die Kreislinien

$$\beta_k(t) = a_k + \varepsilon e^{2\pi i t}, t \in [0, 1].$$

Dabei sei ε so klein gewählt, daß keiner der Kurven β_k die Menge S trifft. Der Zykel

$$\tilde{\gamma} := \gamma - \sum_{k=1}^r \nu_{\gamma}(a_k) \beta_k$$

ist ein Zykel in $G \setminus S$ und umläuft weder Punkte von S noch Punkte von $\mathbb{C} \setminus G$. Also gilt nach der Umlaufversion des Cauchyschen Integralsatzes, angewandt auf die holomorphe Funktion $f : G \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$, daß

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^r \nu_{\gamma}(a_k) \int_{\beta_k} f(z) dz$$

und daher

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \nu_{\gamma}(a_k) \int_{\beta_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \nu_{\gamma}(a_k) \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

□

Der Residuensatz kann zur Berechnung (auch reeller) Integrale verwendet werden. Man spricht dann vom *Residuenkalkül*.

Definition Man sagt, daß eine Funktion f in einer Umgebung von ∞ definiert ist, wenn es ein $R > 0$ gibt, so daß f auf der Menge $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$ definiert ist.

In diesem Fall ist die Funktion $f(1/z)$ in der punktierten Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1/R\}$ definiert.

Definition Man sagt, daß f im Punkt ∞ eine *Nullstelle der Ordnung k* (*Polstelle, isolierte Singularität ...*) hat, wenn f in einer Umgebung von ∞ definiert ist und $f(1/z)$ in 0 eine Nullstelle der Ordnung k (Polstelle, isolierte Singularität ...) besitzt.

Für spätere Anwendungen halten wir noch zwei Lemmata fest, die zur Berechnung von Residuen nützlich sind.

Lemma 7.1 *Die Funktion f habe im Punkt a höchstens einen Pol der Ordnung k . Dann gilt*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-a)^k f(z))|_a.$$

Beweis. Das Residuum ist gleich dem Koeffizienten c_{-1} in der Laurententwicklung von f im Punkt a . Die Funktion $(z-a)^k f(z)$ ist nach der Voraussetzung holomorph im Punkt a und c_{-1} ist gleich dem $(k-1)$ -ersten Taylorkoeffizienten in der Taylorentwicklung dieser Funktion. Damit folgt die Behauptung aus der bekannten Formel für die Taylorkoeffizienten. \square

Lemma 7.2 *Die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ seien holomorph im Punkt a und $h(z)$ habe dort eine einfache Nullstelle. Dann gilt*

$$\operatorname{Res}_a \frac{g}{h} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Beweis. Wir können obiges Lemma auf die Funktion $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ anwenden, die in a höchstens einen Pol 1. Ordnung besitzt. Dann gilt in einer Umgebung von a , daß

$$h(z) = (z-a)h'(a) + \frac{1}{2}(z-a)^2 h''(a) + \dots$$

also mit obigem Lemma

$$\operatorname{Res}_a \frac{g}{h} = \left((z-a) \frac{g(z)}{h(z)} \right) (a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

\square

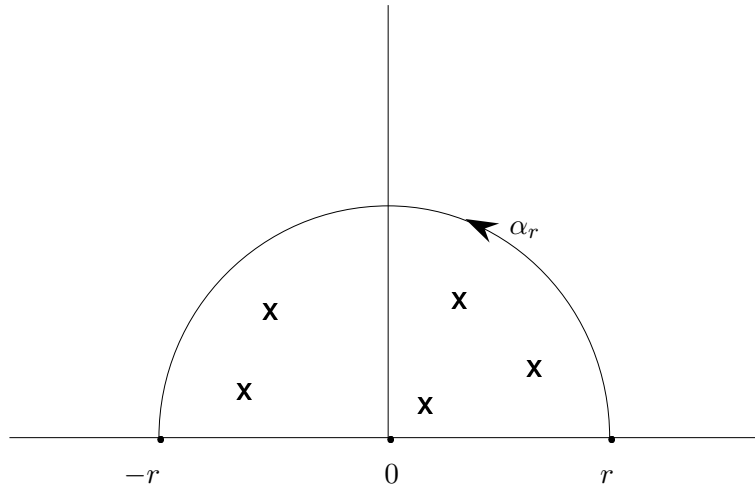
Wir werden nun verschiedene Beispiele für den Residuenkalkül diskutieren.

Satz 7.3 *Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die in ∞ mindestens von Ordnung 2 verschwindet und auf der reellen Achse keine Polstellen besitzt. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a R.$$

Beweis. Wir betrachten die Halbkreise

$$\alpha_r(t) = re^{i\pi t}, t \in [0, 1].$$



Für r genügend groß liegen alle Polstellen von $R(z)$ mit positivem Imaginärteil im Inneren dieser Halbkreise. Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{-r}^r R(z)dz + \int_{\alpha_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}_a R.$$

Der Integrationsweg α_r hat die Länge πr . Da R im Unendlichen eine Nullstelle zweiter Ordnung besitzt, gilt auf der Kurve α_r die Abschätzung $|R(z)| \leq c/r^2$ für r genügend groß und eine geeignete Konstante $c > 0$. Also gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_r} R(z)dz = 0,$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}_a R.$$

□

Beispiel

$$R(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Es gilt

$$R(z) = \frac{1}{(1+iz)} \cdot \frac{1}{(1-iz)}$$

d.h. $R(z)$ hat einfache Polstellen in den Punkten $a = \pm i$. Es gilt nach obigem Lemma, daß

$$\operatorname{Res}_i R = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i.$$

Die Funktion $R(z)$ hat in ∞ eine doppelte Nullstelle, da

$$R\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2+1}$$

in 0 eine doppelte Nullstelle besitzt. Also gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}i\right) = \pi.$$

Dies kann man wie folgt verifizieren:

$$\int_{-r}^r \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-r}^r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \pi.$$

Wir werden diese Technik nun auf Funktionen der Form $R(z)e^{iz}$ anwenden.

Satz 7.4 *Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf \mathbb{R} keine Pole hat. $R(z)$ haben im Unendlichen eine Nullstelle. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0}(R(z)e^{iz}).$$

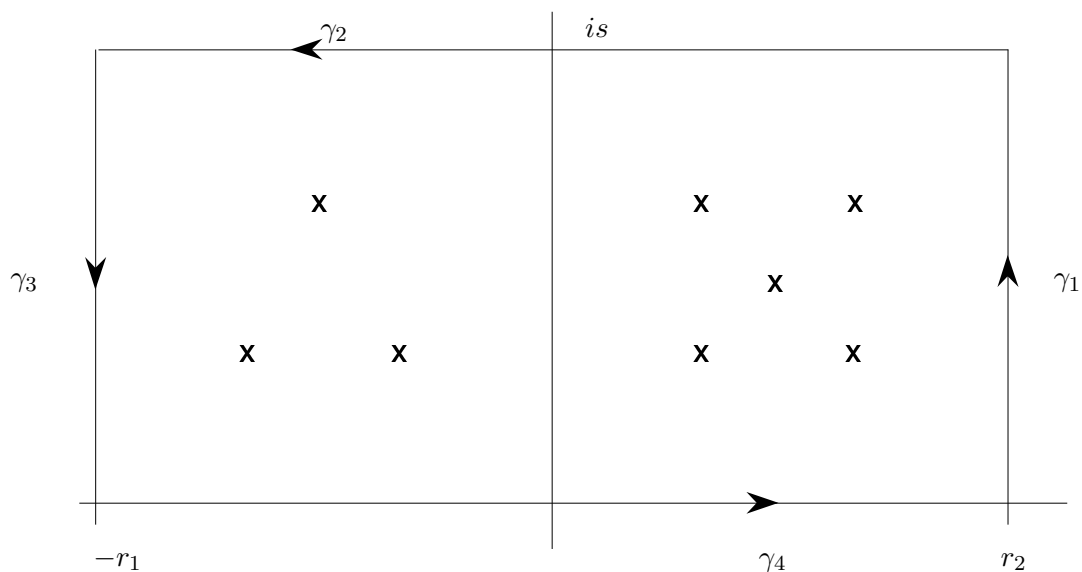
Bemerkung Insbesondere erhält man daraus, falls R reell ist:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0}(R(z)e^{iz}) \right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x dx &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0}(R(z)e^{iz}) \right). \end{aligned} \right\}$$

Beweis. Es seien r_1, r_2, s positiv. Wir betrachten ein Rechteck mit den Bezeichnungen wie auf Seite 43.

Hierbei seien r_1, r_2 und s so groß gewählt, daß dieses Rechteck alle Pole von $R(z)$ mit positivem Imaginärteil enthält. Nach dem Residuensatz gilt:

$$\int_{-r_1}^{r_2} R(z)e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0}(R(z)e^{iz}) - \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} R(z)e^{iz} dz.$$



Die Integrale auf der rechten Seite sind abzuschätzen. Wegen unserer Voraussetzung, daß R in ∞ eine Nullstelle hat, gibt es eine Konstante C , so daß für genügend große r gilt:

$$|R(z)| \leq \frac{C}{|z|} \quad (|z| > r). \quad (1)$$

Für jede komplexe Zahl z gilt

$$|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}$$

also

$$\left| \int_{\gamma_2} R(z) e^{iz} dz \right| \leq (r_1 + r_2) \frac{C}{s} e^{-s}. \quad (2)$$

Für $\gamma_1(t) = r_2 + its, t \in [0, 1]$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} R(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^1 R(r_2 + its) e^{i(r_2 - ts)} is dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |R(r_2 + its) e^{ir_2 - ts} is| dt \\ &\leq \sup_{z \in \gamma_1} |R(z)| s \int_0^1 e^{-ts} dt \\ &= \sup_{z \in \gamma_1} |R(z)| s \left[-\frac{1}{s} e^{-ts} \right]_0^1 \\ &\leq \frac{C}{r_2} (1 - e^{-s}) \\ &\leq \frac{C}{r_2}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\left| \int_{\gamma_3} R(z) e^{iz} dz \right| \leq \frac{C}{r_1}.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen $r_1, r_2 > \frac{1}{3C\varepsilon}$, sowie s so groß, daß

$$(r_1 + r_2) \frac{C}{s} e^{-s} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} R(z) e^{iz} dz \right| < \varepsilon.$$

□

Beispiel: $\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx$ ($a > 0$).

Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{a^2 + x^2} dx \\ &= -\pi \operatorname{Im} \left(\operatorname{Res}_{ia} \frac{e^{iz}}{(z - ia)(z + ia)} \right) = -\pi \operatorname{Im} \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{\pi}{2a} e^{-a}. \end{aligned}$$

Satz 7.5 *Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die in ∞ eine Nullstelle hat und auf \mathbb{R} eine einfache Polstelle in a besitzt. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\rho} R(x) e^{ix} dx + \int_{a+\rho}^\infty R(x) e^{ix} dx \right) &= 2\pi \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0} (R(z) e^{iz}) \\ &\quad + \pi i \operatorname{Res}_a (R(z) e^{iz}). \end{aligned}$$

Bemerkung Diese Aussage läßt sich analog auf endlich viele einfache Pole a_1, \dots, a_k verallgemeinern.

Wir beweisen zunächst das Folgende:

Lemma 7.6 *Es sei a ein einfacher Pol von f und $\gamma_r(t) = a + re^{i\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}_a f.$$

Beweis. Laurententwicklung um den Punkt a ergibt eine Darstellung

$$f(z) = \frac{c}{z - a} + g(z)$$

wobei $g(z)$ eine holomorphe Funktion und $c = \text{Res}_a f$ ist. Es gilt

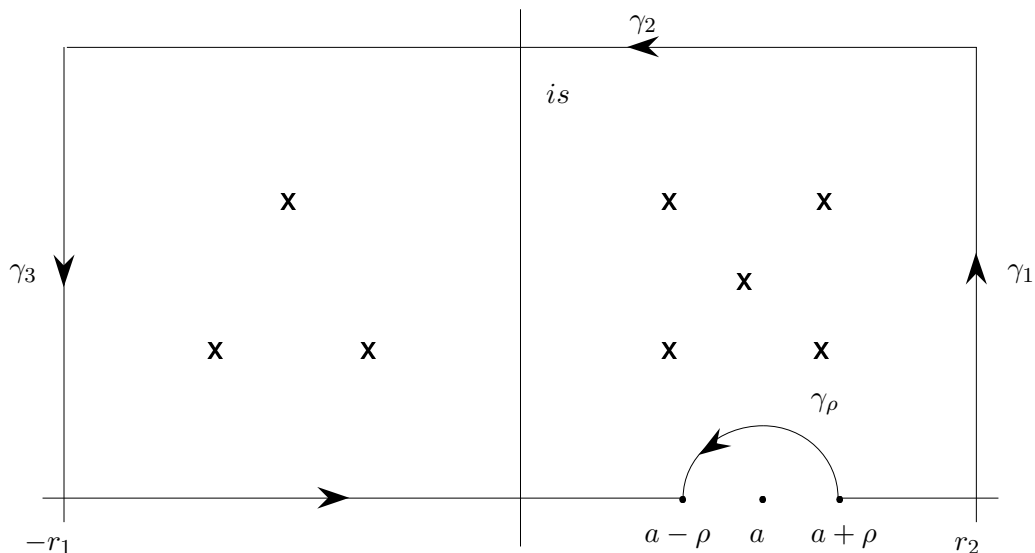
$$\int_{\tilde{\gamma}_r} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{cdz}{z-a} + \int_{\tilde{\gamma}_r} g(z) dz = \pi ic + \int_{\tilde{\gamma}_r} g(z) dz.$$

Für $r \rightarrow 0$ ergibt sich damit der Wert

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\tilde{\gamma}_r} f(z) dz = \pi ic = \pi i \text{Res}_a f.$$

□

Beweis des Satzes: Wir betrachten ein genügend großes Rechteck



Damit gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_{-r_1}^{a-\rho} R(z)e^{iz} dz + \int_{a+\rho}^{r_2} R(z)e^{iz} dz - \int_{\gamma_\rho} R(z)e^{iz} dz - 2\pi i \sum_{\text{Im } z_0 > 0} \text{Res}_{z_0}(R(z)e^{iz}) \\ = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} R(z)e^{iz} dz. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang geht die rechte Seite dieser Gleichung gegen 0. Damit folgt die Behauptung sofort. □

Beispiel $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{e^{iz}}{z} \right) \right) = \operatorname{Im}(\pi i) = \pi. \end{aligned}$$

Bemerkung Es sei $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ und f eine reelle Funktion, die in $a \in \mathbb{R}$ eine Polstelle besitzt. In manchen Fällen existiert das Integral

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-r}^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^r f(x) dx \right) =: \mathcal{P} \int_{-r}^r f(x) dx,$$

ohne daß $\int_{-r}^r f(x) dx$ im eigentlichen Sinne existiert. Man nennt dann diesen Grenzwert den *Hauptwert* (oder *Cauchy-Hauptwert* des Integrals). In diesem Sinn kann man den obigen Satz wie folgt formulieren:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0}(R(z) e^{iz}) + \pi i \operatorname{Res}_a(R(z) e^{iz}).$$

Beispiel Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{x} dx = 0.$$

Andererseits ist

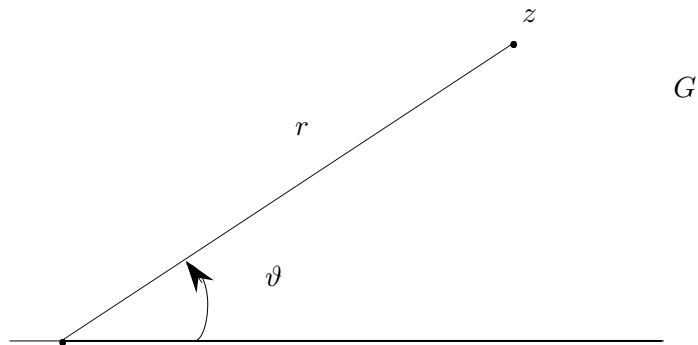
$$\begin{aligned} \int_{-r}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon_2}^r \frac{1}{x} dx &= [\ln(-x)]_{-r}^{-\varepsilon_1} + [\ln(x)]_{\varepsilon_2}^r \\ &= \ln(\varepsilon_1) - \ln(\varepsilon_2) \\ &= \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ keinen Grenzwert.

Bei dem oben gerechneten Beispiel existiert jedoch das uneigentliche Integral, da der Integrand beschränkt ist.

Für das weitere benötigen wir den *Logarithmus*. Wir betrachten die sogenannte geschlitzte Ebene

$$G := \mathbb{C} \setminus \{z; z \geq 0\}.$$



Mittels Polarkoordinaten hat jeder Punkt $z \in G$ eine eindeutige Darstellung

$$z = re^{i\vartheta} \quad (0 < r; 0 < \vartheta < 2\pi).$$

Definition $\log z := \log r + i\vartheta$.

Bemerkung (i) $e^{\log z} = e^{\log r + i\vartheta} = re^{i\vartheta} = z$.

(ii) Die e -Funktion ist lokal umkehrbar, damit ist $\log z$ holomorph.

Definition $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$.

Satz 7.7 Sei $0 < \alpha < 1$. $R(z)$ sei eine rationale Funktion, die bei ∞ von mindestens 2. Ordnung verschwindet. In 0 sei $R(z)$ holomorph, oder habe einen Pol 1. Ordnung. Ansonsten habe $R(z)$ keine Pole auf der positiven reellen Achse. Dann gilt

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{z_0 \neq 0} \text{Res}_{z_0}(z^\alpha R(z)).$$

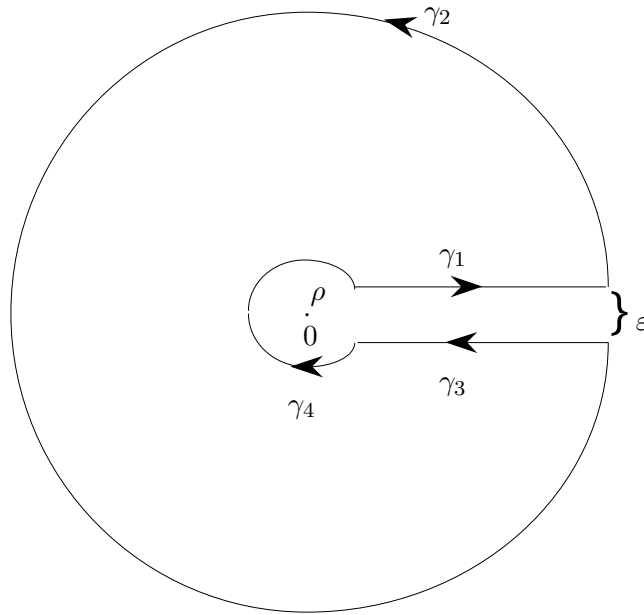
Beweis. Wir betrachten ein Gebiet der folgenden Form, das alle Pole bis auf 0 enthält

Nach dem Residuensatz gilt für $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$:

$$\int_\gamma z^\alpha R(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \text{Res}_{z_0}(z^\alpha R(z)).$$

Nun gilt, da $R(z)$ in ∞ eine Nullstelle von Ordnung mindestens 2 hat

$$\left| \int_{\gamma_2} z^\alpha R(z) dz \right| \leq 2\pi r \cdot c \cdot r^{\alpha-2} \rightarrow 0$$



falls $\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$. Hierbei ist c eine geeignete Konstante und r der Radius des Kreises auf dem der Weg γ_2 liegt. Da R in 0 höchstens einen Pol 1. Ordnung hat, gilt wiederum für eine geeignete Konstante C , daß $|R(z)| \leq \frac{C}{|z|}$ in der Nähe von 0 . Also gilt dort, da $\alpha > 0$

$$\left| \int_{\gamma_4} z^\alpha R(z) dz \right| \leq 2\pi\rho \cdot C\rho^{\alpha-1} = 2\pi C\rho^\alpha \longrightarrow 0$$

falls $\varepsilon, \rho \rightarrow 0$. Ferner gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} z^\alpha R(z) dz = \int_{\rho}^r z^\alpha R(z) dz.$$

Schließlich gilt noch für $z = x - i\varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x - i\varepsilon)^\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log x + 2\pi i)} = x^\alpha e^{2\pi i \alpha}.$$

Damit folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} z^\alpha R(z) dz = -e^{2\pi i \alpha} \int_{\rho}^r z^\alpha R(z) dz.$$

Zusammen erhalten wir

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^\infty x^\alpha R(x) dx = 2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \text{Res}_{z_0}(z^\alpha R(z)).$$

Beispiel $R(z) = \frac{1}{z(z+1)}$. Es ist

$$\operatorname{Res}_{-1} \frac{z^\alpha}{z(z+1)} = (-1)^{\alpha-1} = e^{i\pi(\alpha-1)} = -e^{i\alpha\pi}.$$

Also hat man

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+1)} dx = \frac{2\pi i}{(1-e^{2\pi i\alpha})} (-e^{i\alpha\pi}) = \frac{2\pi i}{e^{\pi i\alpha} - e^{-\pi i\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Satz 7.8 *Es sei eine $R(x, y)$ eine rationale Funktion, so daß die Funktion $R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ auf dem Einheitskreis keine Pole oder wesentlichen Singularitäten hat. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta = 2\pi \sum_{|z_0| < 1} \operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \right)$$

Beweis. Es gilt

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Also gilt für den Integrationsweg $\gamma(t) = e^{it}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\right) dt \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} \\ &= 2\pi \sum_{|z_0| < 1} \operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \right). \end{aligned}$$

□

Beispiel Es sei $a > 1$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z^2 + 2az + 1)}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$(z^2 + 2az + 1) = (z - z_1)(z - z_2); \quad z_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Also gilt, da $|z_1| < 1, |z_2| > 1$:

$$\int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} = 2\pi \operatorname{Res}_{z_1} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

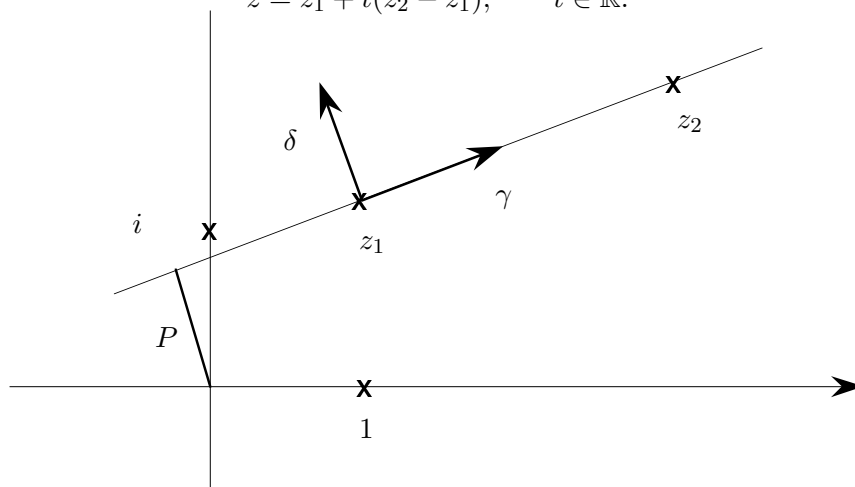
§ 8 Die Riemannsche Zahlenkugel

Wir untersuchen zunächst Geraden- und Kreisgleichungen in der komplexen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Geradengleichungen

Die Parameterdarstellung einer Geraden durch zwei Punkte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{R}$ lautet

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$



Der reelle Vektor

$$\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}$$

ist der normierte Richtungsvektor dieser Geraden. Aus (1) erhält man durch Umformung die Gleichung

$$\frac{z - z_1}{|z_2 - z_1|} = \gamma t$$

und Multiplikation mit $\bar{\gamma}$ ergibt

$$\frac{z - z_1}{|z_2 - z_1|} \bar{\gamma} = t. \quad (3)$$

Da die rechte Seite von (2) reell ist, ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\operatorname{Im}(\bar{\gamma}(z - z_1)) = 0. \quad (4)$$

Da zudem Multiplikation mit i einer Drehung um $\pi/2$ entspricht, definiert $\delta = i\gamma$ einen Normaleneinheitsvektor der Geraden. Die Gleichung (3) wird dann wegen $\bar{\gamma} = \overline{-i\delta} = i\bar{\delta}$ zu

$$\operatorname{Im}(i\bar{\delta}(z - z_1)) = 0,$$

bzw. zu

$$\operatorname{Re}(\bar{\delta}(z - z_1)) = 0.$$

Setzt man

$$p := \operatorname{Re} \bar{\delta} z_1,$$

so wird dies gerade zu

$$\operatorname{Re} \bar{\delta} z = p,$$

bzw.

$$\bar{\delta} z + \delta \bar{z} - 2p = 0.$$

Mit $z = x + iy$ schreibt sich dies auch als

$$(\bar{\delta} + \delta)x + (i\bar{\delta} - i\delta)y - 2p = 0$$

bzw.

$$\operatorname{Re} \delta \cdot x + \operatorname{Im} \delta \cdot y - p = 0.$$

Dies ist die Hessesche Normalform.

Kreisgleichungen

Wir betrachten die Gleichung

$$az\bar{z} + \bar{a}z + \alpha\bar{z} + b = 0; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad D := \alpha\bar{a} - ab > 0. \quad (5)$$

Für $a = 0$ stellt dies eine Geradengleichung dar. Für $a \neq 0$ kann man dies, wie direktes Nachrechnen sofort zeigt, in der Form

$$\left(z + \frac{\alpha}{a}\right) \left(\bar{z} + \frac{\bar{a}}{a}\right) = \frac{\alpha\bar{a} - ab}{a^2} = \frac{D}{a^2}$$

schreiben, bzw.

$$\left|z + \frac{\alpha}{a}\right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}.$$

Dies ist ein Kreis mit Mittelpunkt $-\alpha/a$ und Radius $\sqrt{D}/|a|$. Ist $D < 0$, so beschreibt diese Gleichung die leere Menge.

Die erweiterte Zahlenebene $\bar{\mathbb{C}}$

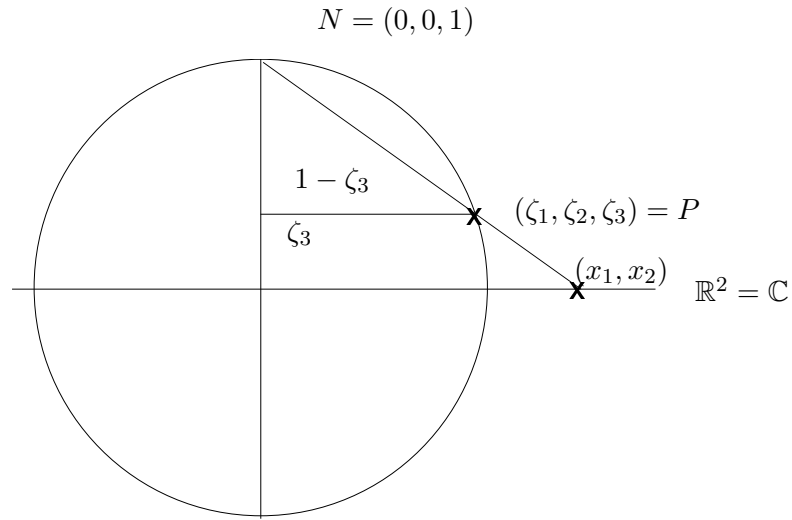
Wir definieren die *erweiterte Zahlenebene* durch

$$\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Mit Hilfe der *stereographischen Projektion* kann man die erweiterte Zahlenebene $\bar{\mathbb{C}}$ mit der Einheitssphäre

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

identifizieren:



Man definiert dann

$$\pi : S^2 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

$$\pi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{cases} (x_1, x_2) & \text{falls } P = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{falls } P = \infty. \end{cases}$$

Der Projektionsstrahl durch die Punkte N und P hat die Parameterdarstellung

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Für $t = 1/(1 - \zeta_3)$ erhält man in der dritten Koordinate gerade 0, und damit

$$x_1 = \frac{\zeta_1}{1 - \zeta_3}, \quad x_2 = \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_3}. \quad (6)$$

Um die Umkehrabbildung explizit anzugeben, betrachten wir

$$z = x_1 + ix_2 = \frac{\zeta_1 + i\zeta_2}{1 - \zeta_3}, \quad \bar{z} = \frac{\zeta_1 - i\zeta_2}{1 - \zeta_3}.$$

Wegen $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1$, folgt daraus

$$z\bar{z} = \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{(1 - \zeta_3)^2} = \frac{1 - \zeta_3^2}{(1 - \zeta_3)^2} = \frac{1 + \zeta_3}{1 - \zeta_3},$$

bzw.

$$1 + z\bar{z} = \frac{2}{1 - \zeta_3} \quad (7)$$

und damit

$$\zeta_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}. \quad (8)$$

Damit erhält man mit Hilfe von (5) und (6)

$$\zeta_1 = 2x_1 \frac{1 - \zeta_3}{2} = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1} \quad (9)$$

und analog

$$\zeta_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{z\bar{z} + 1}. \quad (10)$$

Eine Bemerkung zur Topologie

Man kann $\bar{\mathbb{C}}$ mit einer Topologie versetzen, indem man eine Umgebungsbasis des Punktes ∞ durch die folgenden Mengen definiert:

$$U_\varepsilon(\infty) := \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{\infty\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Damit wird $\pi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ ein Homöomorphismus. Insbesondere wird $\bar{\mathbb{C}}$ zu einem kompakten Hausdorffraum.

Satz 8.1 *Unter der stereographischen Projektion π werden Kreise auf S^2 in Kreise oder Geraden in \mathbb{R}^2 abgebildet.*

Beweis. Ein Kreis auf S^2 entsteht als Schnitt mit einer Ebene

$$a\zeta_1 + b\zeta_2 + c\zeta_3 = p. \quad (11)$$

Dabei können wir a, b, c so wählen, daß $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ gilt. Der Durchschnitt mit der Sphäre ist genau dann nicht leer und von einem Punkt verschieden, falls der Abstand dieser Ebene vom Ursprung kleiner 1 ist, d.h. falls $p^2 < 1 = a^2 + b^2 + c^2$. Setzt man (7), (8) und (9) in die Gleichung (10) ein, so erhält man nach Multiplikation mit $1 + z\bar{z}$ die Gleichung

$$a(z + \bar{z}) + bi(\bar{z} - z) + c(z\bar{z} - 1) = p(z\bar{z} + 1),$$

bzw.

$$(c - p)z\bar{z} + \alpha z + \alpha\bar{z} - (c + p) = 0 \text{ mit } \alpha = a + ib.$$

Dies ist eine Geradengleichung, falls $c = p$ gilt, ansonsten eine Kreisgleichung, da

$$D = \alpha\bar{\alpha} + (c - p)(c + p) = a^2 + b^2 + c^2 - p^2 > 0.$$

□

Bemerkung Der Beweis zeigt auch, daß Kreise durch den Nordpol N auf Geraden gehen.

Bemerkung Die stereographische Projektion ist winkeltreu.

§ 9 Möbiustransformationen

Für jede invertierbare Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_A : \bar{\mathbb{C}} &\rightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ \varphi_A(z) &:= \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned} \tag{12}$$

Damit diese Abbildung wohldefiniert ist, müssen wir ferner eine Aussage über das Bild des Punktes ∞ machen. Wir setzen

$$\varphi_A(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \\ \infty & \text{falls } c = 0. \end{cases}$$

Aus der Definition sehen wir auch sofort, daß zwei Matrizen A und λA mit $\lambda \neq 0$ dieselbe Abbildung liefern.

Definition Die Abbildung φ_A heißt eine *Möbiustransformation* (gebrochen rationale Transformation).

Satz 9.1 (i) Für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ gilt

$$\varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_{BA}.$$

(ii) Die Abbildung φ_A ist bijektiv mit Umkehrabbildung $(\varphi_A)^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.

Beweis. Es genügt, (i) zu zeigen. Dies kann man direkt nachrechnen. Mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

gilt nämlich

$$\begin{aligned} (\varphi_B \circ \varphi_A)(z) &= \varphi_B \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) \\ &= \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} = \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} \\ &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} = \varphi_{BA}(z). \end{aligned}$$

□

Korollar 9.2 Die Möbiustransformationen bilden bezüglich der Hintereinanderschaltung eine Gruppe.

Wir betrachten nun folgende *spezielle Typen* von Möbiustransformationen:

- (1) $z \mapsto z + a'$ ($c = 0, a = d$)
- (2) $z \mapsto a'z$ ($b = c = 0$)
- (3) $z \mapsto \frac{1}{z}$ ($a = d = 0, b = c$).

Satz 9.3 Die speziellen Möbiustransformationen vom Typ (1), (2) und (3) erzeugen die Gruppe aller Möbiustransformationen.

Beweis. Es sei

$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ist $c = 0$, so wird dies zu

$$\varphi_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

und wir können diese Abbildung als eine Hintereinanderschaltung von Abbildungen vom Typ (1) und (2) darstellen. Ist $c \neq 0$, so rechnet man sofort nach, daß

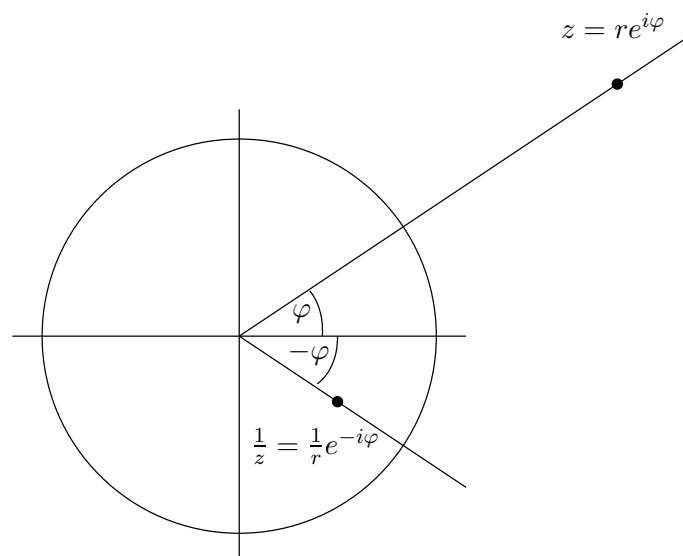
$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

Aus dieser Darstellung folgt die Behauptung unmittelbar. \square

Die speziellen Möbiustransformationen haben die folgende geometrische Bedeutung: (1) ist eine Translation, (2) ist eine Drehstreckung und (3) ist eine "Spiegelung am Einheitskreis". Man kann nämlich (3) auch so beschreiben. Ist $z = re^{i\varphi}$, so ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

Dies sieht wie folgt aus:



Satz 9.4 Möbiustransformationen sind winkeltreue Abbildungen.

Beweis. Es genügt, dies für Erzeugende der Gruppe der Möbiustransformationen zu zeigen, d.h. für spezielle Möbiustransformationen vom Typ (1), (2) und (3). Für (1) und (2) ist dies klar, für (3) folgt dies aus der oben gegebenen geometrischen Beschreibung. Die Abbildung $z \mapsto 1/z$ erhält den Betrag der Winkel, ändert aber die Orientierung. \square

Satz 9.5 Jede Möbiustransformation führt die Menge der Geraden und Kreise in sich über.

Beweis. Auch hier genügt es, dies für die Typen (1), (2) und (3) zu zeigen. Für (1) und (2) ist dies aus geometrischen Gründen klar. Alle Geraden und Kreise lassen sich durch eine Gleichung der Form

$$az\bar{z} + \bar{a}z + \alpha\bar{z} + b = 0; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \alpha\bar{a} - ab > 0$$

beschreiben. Setzt man $w = 1/z$ und multipliziert mit $w\bar{w}$ so erhält man

$$bw\bar{w} + \alpha w + \bar{\alpha}\bar{w} + a = 0; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \alpha\bar{a} - ab > 0.$$

\square

Das Doppelverhältnis

Für vier reelle Punkte



wird das *Doppelverhältnis* durch

$$DV(A, B, C, D) := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

erklärt. Entsprechend definiert man das *Doppelverhältnis* von vier (verschiedenen) Punkten $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ durch

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Das Doppelverhältnis hängt von der Reihenfolge der Punkte ab. Permutiert man diese, so ergeben sich die 6 (nicht notwendigerweise verschiedenen) Werte

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Satz 9.6 Möbiustransformationen erhalten das Doppelverhältnis. D.h. ist φ_A eine Möbiustransformation und sind $z_i; i = 1, \dots, 4$ vier verschiedene Punkte in $\bar{\mathbb{C}}$ mit Bildpunkten $w_i = \varphi_A(z_i)$, so gilt

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Beweis. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so gilt

$$\begin{aligned} w_k - w_l &= \frac{az_k + b}{cz_k + d} - \frac{az_l + b}{cz_l + d} \\ &= \frac{ad - bc}{(az_k + d)(cz_l + d)}(z_k - z_l). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$(w_1 - w_3)(w_2 - w_4) = \frac{(ad - bc)^2}{\prod_{k=1}^4 (cz_k + d)}(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$$

und entsprechend

$$(w_2 - w_3)(w_1 - w_4) = \frac{(ad - bc)^2}{\prod_{k=1}^4 (cz_k + d)}(z_2 - z_3)(z_1 - z_4),$$

Division dieser beiden Gleichungen liefert dann unmittelbar

$$DV(w_1, w_2, w_3, w_4) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

□

Satz 9.7 Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 je drei verschiedene Punkte in $\bar{\mathbb{C}}$, dann gibt es genau eine Möbiustransformation φ_A mit $\varphi_A(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$.

Beweis. Es genügt, dies für $z_1 = \infty, z_2 = 0$ und $z_3 = 1$ zu zeigen. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist

$$\varphi_A(\infty) = \frac{a}{c}, \quad \varphi_A(0) = \frac{b}{d}, \quad \varphi_A(1) = \frac{a+b}{c+d}.$$

Wir wählen zunächst $a, c, b, d \in \mathbb{C}$, so daß

$$\frac{a}{c} = w_1, \quad \frac{b}{d} = w_2$$

gilt. Da $w_1 \neq w_2$ folgt sofort, daß

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}).$$

Multipliziert man a, c mit einem Skalar $\lambda \neq 0$, so bleibt $a/c = w_1$ erhalten. Wir wollen λ so wählen, daß

$$\varphi_A(1) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} = w_2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lambda(a - cw_2) = dw_2 - b.$$

Da $w_1 \neq w_2 = a/c$ ist $a - cw_2 \neq 0$ und diese Gleichung läßt sich nach λ auflösen. Dieser Beweis zeigt auch, daß a, b, c, d bis auf einen gemeinsamen, von 0 verschiedenen, Faktor bestimmt sind, und damit ist φ_A eindeutig bestimmt. \square

Die projektive Gerade

Der n -dimensionale projektive Raum wird wie folgt definiert. Auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ führt man eine Äquivalenzrelation ein durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^*$$

und setzt dann

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim.$$

Damit entsprechen die Punkte von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eindeutig den Ursprungsgeraden in \mathbb{C}^{n+1} . Jede solche Gerade ist durch einen erzeugenden Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ nicht alle } x_i = 0$$

bestimmt. Bezeichnet man den zugehörigen Punkt in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit P , so schreibt man

$$P = (x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Man nennt $(x_0 : \dots : x_n)$ die *homogenen Koordinaten* von P . Diese sind nur bis auf einen gemeinsamen, von 0 verschiedenen, Skalar festgelegt. Man nennt $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die *komplexe projektive Gerade*. Durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\rightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ (x_0 : x_1) &\mapsto x_0/x_1 \end{aligned}$$

kann man $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $\bar{\mathbb{C}}$ identifizieren. Dabei entspricht der Punkt $(1 : 0) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dem Punkt $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$.

Unter dieser Identifikation wird die Gruppe der Möbiustransformationen auf $\bar{\mathbb{C}}$ mit der Gruppe der Projektivitäten von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ identifiziert.